**Mathématiques Expertes**

**Évaluation du 30 octobre 2023 (1h)**

**Exercice 1**

Soit $X=\left(\begin{matrix}1&2-x\\2x+3&3\end{matrix}\right)$.

Pour quelle valeur de $x$ la matrice $X$ est-elle égale à sa transposée ?

**Exercice 2**

Ecrire la matrice $A=\left(a\_{ij}\right)$ de dimension $n×p$ correspondante.

$$n=3 et p=2 ; a\_{ij}=\left\{\begin{matrix}i si j est pair\\j sinon\end{matrix}\right.$$

**Exercice 3**

$A=\left(\begin{matrix}3&-1\\-1&0\end{matrix}\right)$ et $I\_{2}=\left(\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\right)$

1. Vérifier par le calcul que $A\left(A-3I\_{2}\right)=I\_{2}$
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

**Exercice 4**

On donne $M=\left(\begin{matrix}1&1&1\\1&-1&1\\4&2&1\end{matrix}\right)$ et $I=\left(\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right)$.

1. Déterminer la matrice $M^{2}$ à l’aide de la calculatrice.

On admet que $M^{3}=\left(\begin{matrix}20&10&11\\12&2&9\\42&20&21\end{matrix}\right)$.

1. Vérifier que $M^{3}=M^{2}+8M+6I$.
2. En déduire que la matrice $M$ est inversible et exprimer $M^{-1}$ en fonction de $M$ et de $I$.

**Exercice 5**

$M=\left(\begin{matrix}0&-1\\3&4\end{matrix}\right)$ , $P=\left(\begin{matrix}-1&1\\1&-3\end{matrix}\right)$ et $D=\left(\begin{matrix}1&0\\0&3\end{matrix}\right)$

1. Montrer que $P$ est inversible et donner à l'aide de la calculatrice, la matrice inverse $P^{-1}$ de $P$, puis vérifier que$ M = PDP^{-1}$
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n\geq 1 $, $M^{n}=PD^{n}P^{-1}$.
3. On admet que pour tout entier naturel $n\geq 1$, $D^{n}=\left(\begin{matrix}1&0\\0&3^{n}\end{matrix}\right)$.

En déduire alors $M^{n}$ en fonction de $n$.