**Durée : 1 h**

**NOM :**………………………………...

**Prénom :**………………………………

**Question de cours (3 points)**

*m*  est un entier naturel non nul et *a* , *b* , *a’* et *b’* sont des entiers relatifs;

Montrer que si $a≡b \left[m\right]$ et si $a'≡b'  \left[m\right]$ alors $a+a'≡b+b'  \left[m\right]$

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

**Exercice 1 (4 points)**

Démontrer à l’aide de congruences que pour tout entier *n*, $n\left(5n^{2}+1\right)$ est divisible par 3.

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

**Exercice 2 (4 points)**

En utilisant des congruences, déterminer les entiers naturels *n* tels que $n^{3}+2n^{2}-1$ soit divisible par 5.

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

**Exercice 3 (4 points)**

Soit *n* un entier naturel.

Démontrer que $3^{6n+2}+3^{3n+1}+1$ est un multiple de 13.

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

**Exercice 4 (5 points)**

1. Déterminer, suivant les valeurs de l’entier naturel *n* non nul, le reste de la division par 9 de $4^{n}$ .

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

1. Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $4^{n}-3n-1≡0  \left[9\right]$.

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………