1 Rappels de cours

D_f est encore appelé *domaine de définition* de f ou *domaine* de f.

Définition 1 L'ensemble des réels possédant une image par une fonction est appelé *ensemble de définition* de la fonction. On le note D_f.

Le calcul d'une image doit satisfaire aux trois règles suivantes :
- on ne divise pas par zéro ;
- on prend la racine carrée d'une quantité positive ou nulle ;
- on prend le logarithme néperien d'une quantité strictement positive.

2 Méthode et exemples

Quand on devra déterminer l'ensemble de définition d'une fonction, on commencera toujours par se poser les questions suivantes : dans l'expression algébrique de l'image, ...
- y a-t-il un quotient ? Si oui, par quoi divise-t-on ?
- y a-t-il une racine carrée ? Si oui, de quelle quantité prend-on la racine carrée ?
- y a-t-il un logarithme néperien ? Si oui, de quelle quantité prend-on le logarithme néperien ?

Si on répond non à ces trois questions, il n'y a pas de valeurs interdites et la fonction sera définie sur $\mathbb{R}$.

Exemples. ① Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x+1}{2x^2+x-1}$. On a :

$$x \in D_f \iff 2x^2 + x - 1 \neq 0$$

Le trinôme $2x^2+x-1$ a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4\times 2\times(-1) = 9 > 0$. Le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 2} = -1 \quad ; \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 2} = 4$$

Conclusion : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\,;4\}$.

② Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{\frac{-x+1}{2x+1}}$. On a :

$$x \in D_g \iff \left(\frac{-x+1}{2x+1} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 2x+1 \neq 0\right)$$

On dresse un tableau de signes. On a :

$$-x+1 = 0 \iff x = 1 \quad ; \quad 2x+1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-x+1}{2x+1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Conclusion : $D_g = \left]-\frac{1}{2}\,;1\right]$.

③ Soit h la fonction définie par $h(x) = \ln(x+4)$. On a :

$$x \in D_h \iff x+4 > 0 \iff x > -4$$

Conclusion : $D_h =]-4\,;+\infty[$.

3 Exercice

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

a) $f(x) = \ln(x^2+4x)$.

b) $f(x) = \ln|x^2-3x+2|$.

c) $f(x) = \ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$.

d) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-x+1}}$.