1 Rappels de cours

Cette propriété traduit la bijectivité de la fonction exponentielle.

Propriété 1 Soient a et b deux réels. Alors :

$$e^a = e^b \iff a = b.$$

2 Méthode et exemples

Point méthode Pour résoudre une équation avec des exponentielles :
① on détermine le domaine de validité de l'équation ;
② on résout l'équation en s'appuyant sur la propriété 1 ;
③ on teste si les solutions trouvées sont dans le domaine de validité et on conclut.

Exemple. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
a) $e^{\frac{1}{x}} = e^{x+1}$. b) $3e^{2x} + e^x - 4 = 0$.

a) Soit D_v le domaine de validité de l'équation. On a :

$$x \in D_v \iff x \neq 0$$

On en tire : $D_v = \mathbb{R}^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} & e^{\frac{1}{x}} = e^{x+1} \\ \iff & \tfrac{1}{x} = x+1 \\ \iff & x^2 + x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Le trinôme $x^2 + x - 1$ a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$.
Il admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

$x_1 \in D_v$ et $x_2 \in D_v$ donc $\mathscr{S} = \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

b) Le domaine de validité de l'équation est $D_v = \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

On pose $X = e^x$ pour se ramener à du second degré.

$$\begin{aligned} & 3e^{2x} + e^x - 4 = 0 \\ \iff & 3(e^x)^2 + e^x - 4 = 0 \\ \iff & 3X^2 + X - 4 = 0 \quad \text{et} \quad X = e^x \end{aligned}$$

Le trinôme $3X^2 + X - 4$ a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 49 > 0$.
Il admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-1-7}{6} = -\frac{4}{3} \quad ; \quad X_2 = \frac{-1+7}{6} = 1.$$

Le système précédent est alors équivalent à :

$$\begin{aligned} & e^x = -\tfrac{4}{3} \quad \text{ou} \quad e^x = 1 \\ \iff & e^x = 1 \quad \text{car} \quad e^x > 0 \\ \iff & x = 0 \end{aligned}$$

$0 \in D_v$ donc $\mathscr{S} = \{0\}$.

3 Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
a) $e^{x^2} = 1$. b) $e^{-x+4} = (e^{-x})^4$.
c) $e^x + e^{-x} = 0$. d) $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$.
e) $e^{4x-1} = \frac{1}{e}$. f) $e^{2x} - (1+e)e^x + e = 0$.