FICHE MÉTHODE : DÉTERMINER LA LIMITE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Exemple 1 : avec des fonctions du type ln *u* (où *u* est une fonction)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; \frac{1}{2}[$ par : $f(x) = \ln(2 - 2x) + \ln(1 - 2x)$

1) Étudier la limite de f en $\frac{1}{2}$.
2) Étudier la limite de f en $-\infty$.

SOLUTION :

1) • On a : $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (2 - 2x) = 1$.

   Donc : $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \ln(2 - 2x) = 0$ car $\ln 1 = 0$.

   • On a : $\lim\limits_{x \to \frac{1^-}{2}} (1 - 2x) = 0^+$.

   Donc : $\lim\limits_{x \to \frac{1^-}{2}} \ln(1 - 2x) = -\infty$ car $\lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty$.

   Bilan : par addition, nous obtenons : $\lim\limits_{x \to \frac{1^-}{2}} [\ln(2 - 2x) + \ln(1 - 2x)] = -\infty$.

Principe : on cherche déjà la limite de la quantité X qui "est dans le logarithme" puis on en déduit la limite de ln X

2) • On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} (2 - 2x) = +\infty$.

   Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(2 - 2x) = +\infty$ car $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$.

   • De même, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - 2x) = +\infty$.

   Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 - 2x) = +\infty$ car $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$.

   Bilan : par addition, nous obtenons : $\lim\limits_{x \to -\infty} [\ln(2 - 2x) + \ln(1 - 2x)] = +\infty$

Exemple 2 : avec une fonction du type $\mathbf{e}^u$ (où *u* est une fonction)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathbf{e}^{1,1x-1}$

1) Étudier la limite de f en $+\infty$.
2) Étudier la limite de f en $-\infty$.

SOLUTION :

1) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (1,1x - 1) = +\infty$.

   Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{e}^{1,1x-1} = +\infty$ car $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathbf{e}^X = +\infty$.

2) On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} (1,1x - 1) = -\infty$.

   Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathbf{e}^{1,1x-1} = 0$ car $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathbf{e}^X = 0$.

Exercices proposés : déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + x^2)$
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 + x^2)$
3) $\lim\limits_{x \to 0} \ln(1 + x^2)$
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{6x+1}{2x-1}\right)$
5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{e}^{-x^2}$
6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{e}^{x-x^2}$
7) $\lim\limits_{x \to 0} \mathbf{e}^{x-x^2}$
8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{e}^{\mathbf{e}^{-x}}$

Questions supplémentaires :

1) Justifier pourquoi, dans l'exemple 1, la fonction f est définie sur $]-\infty ; \frac{1}{2}[$.

2) Démontrer que la dérivée de la fonction f de l'exemple 1 est donnée par :

$$f'(x) = \frac{4x-3}{(x-1)(2x-1)} \quad \text{pour tout } x \in]-\infty ; \frac{1}{2}[.$$

En déduire le tableau de variation de cette fonction f.

(Voir aussi l'exemple 2 de la fiche méthode "étudier le signe d'une expression")

Exercice plus difficile :

Déterminer : $\lim\limits_{x \to -\infty} [\ln(2-2x) - \ln(1-2x)]$ (Qu'y a-t-il de radicalement différent par rapport à l'exemple 1 ?)

(Voir aussi l'exemple 2 de la fiche méthode "comportements asymptotiques")

Mini problème :

Partie *A* *Étude d'une fonction "simple"*

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = \frac{1-x^2}{2}$.

1) Étudier les limites de u en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Calculer $u'(x)$.

Partie *B* *Étude d'une fonction comportant une exponentielle*

On considère la fonction f définie, sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \mathbf{e}^{\frac{1-x^2}{2}}$.

1) Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Préciser les éventuelles asymptotes horizontales.

2) Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variations (complet) de f.

3) Tracer (soigneusement) la courbe C_f représentant f dans un repère orthonormal. (Unités : 4 cm)

4) Soit A le point de C_f d'abscisse $x_0 = 1$. Calculer l'ordonnée de A.

5) Déterminer une équation de la tangente Δ à C_f en A. Tracer Δ dans le repère.

(Voir aussi la fiche méthode "déterminer une équation de la tangente à une courbe")

Réponses des exercices proposés :

1) $+\infty$ 2) $+\infty$ 3) 0 4) $\ln 3$ 5) 0 6) 0 7) 1 8) 1

Indications pour l'exercice plus difficile :

Nous avons affaire à une indétermination du type "$\infty - \infty$". Pour lever cette indétermination, procéder en deux étapes : ❶ utiliser la relation $\ln A - \ln B = \ln \frac{A}{B}$ (pour tous A et B de $]0 ; +\infty[$) puis ❷ mettre le terme de plus haut degré en facteur pour lever l'indétermination de la fraction rationnelle. Le résultat final est : $\ln 1 = 0$.

Quelques réponses du mini-problème :

A1) $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -\infty$.

B1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Asymptote horizontale : $y = 0$.

(Autres réponses dans la fiche méthode "déterminer une équation de la tangente à une courbe")