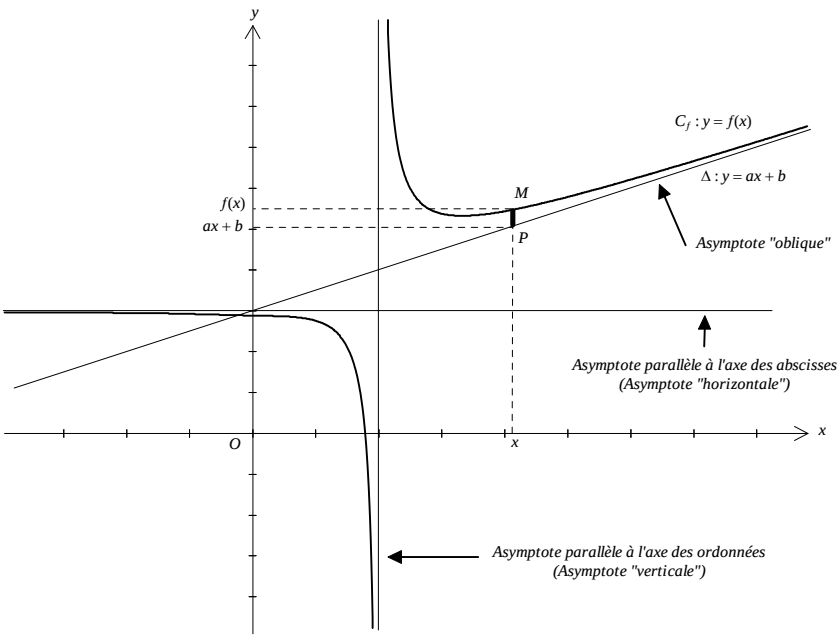
FICHE MÉTHODE : COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES

La notion d'asymptote à une courbe est liée à la notion de limite d'une fonction

Soit f une fonction représentée par une courbe C_f.

Dans les définitions suivantes, le symbole $\ast$ représente un "+" ou un "−" :

- Si la limite de f en a^* est **infinie**, alors on dit que la courbe C_f admet une asymptote "verticale" d'équation $x = a$.
- Si la limite de f en $\ast\infty$ est un nombre **fini** k, alors on dit que la courbe C_f admet une asymptote "horizontale" d'équation $y = k$ en $\ast\infty$.
- Si la limite en $\ast\infty$ des nombres $\boldsymbol{f(x) - (ax + b)}$ est **nulle**, alors on dit que la courbe C_f admet une asymptote "oblique" d'équation $y = ax + b$ en $\ast\infty$.



Pour l'asymptote oblique, il faut bien comprendre ce qui suit : les nombres $f(x) - (ax + b)$ représentent "l'écart vertical" entre la courbe C_f et la droite Δ aux points d'abscisses x (distance MP sur la figure).

Vocabulaire : on parle de l'asymptote **à une courbe** (et non à une fonction). C'est une notion **graphique**.

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = x\,\mathbf{e}^{-x}$.

On note C_f sa courbe représentative.

1) Étudier la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement.
2) Étudier la limite de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement.

SOLUTION :

1) On sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}\,\mathbf{e}^{-x} = 0$ pour tout $\alpha > 1$ (formulaire). Avec $\alpha = 1$, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathbf{e}^{-x} = 0$

   La limite de f en $+\infty$ est **finie**, donc la courbe C_f admet une asymptote "horizontale" en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

2) On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\mathbf{e}^{x}} = +\infty, \text{ puisque } \lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^{x} = 0^{+}. \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty. \end{cases}$$

   Donc, par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathbf{e}^{-x} = -\infty$.

   La limite de f en $-\infty$ n'est **pas finie**, donc la courbe C_f n'admet pas d'asymptote "horizontale" en $-\infty$.

Exemple 2 :

Soit f la fonction définie, sur $]2\,;+\infty[$, par : $f(x) = \ln(x - 2) - \ln(x + 1) + x$.

On note C_f sa courbe représentative.

1) Démontrer que la droite D d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à C_f.
2) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$.

SOLUTION :

1) Ici, il ne peut s'agir que de la limite en 2^+. (Car f est définie sur $]2\ ;+\infty[$). On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0^+, \text{ donc } \lim\limits_{x\to 2^+}\ln(x-2)=-\infty. \text{ (Car } \lim\limits_{X\to 0^+}\ln X=-\infty) \\ \lim\limits_{x\to 2^+}[-\ln(x+1)+x]=-\ln 3+2 \end{cases}$$

Donc, par addition, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$.

La courbe C_f admet donc une asymptote "verticale" D d'équation $x=2$.

2) Nous devons étudier la limite en $+\infty$ de la différence : $f(x)-x=\ln(x-2)-\ln(x+1)$.

La différence $\ln(x-2)-\ln(x+1)$ est indéterminée en $+\infty$. (Forme "$\infty-\infty$")

D'après la relation : $\ln A-\ln B=\ln\dfrac{A}{B}$ pour tous A et B de $]0\ ;+\infty[$, nous obtenons :

$$\ln(x-2)-\ln(x+1)=\ln\frac{x-2}{x+1}$$

Le quotient $\dfrac{x-2}{x+1}$ est toujours indéterminé en $+\infty$. (Forme "$\dfrac{\infty}{\infty}$")

En mettant le terme de plus haut degré en facteur, on obtient :

$$\frac{x-2}{x+1}=\frac{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$)

Donc, par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=1$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+1}=1$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x-2}{x+1}=\ln 1=0$

Remarque : on obtient également ce résultat en utilisant la règle : "la limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré".

Bilan : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$. Donc la droite Δ d'équation $y=x$ est bien asymptote "oblique" à C_f en $+\infty$.

Exercices proposés

1) Soit C_m la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par : $C_m(q)=0{,}8+4(1-2q)\,\mathbf{e}^{-2q}$

Étudier les limites de C_m en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=2x-1+\dfrac{1}{\mathbf{e}^x-1}$

Déterminer les limites de f en 0^+ et 0^-. Interpréter graphiquement.

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-1)]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(2x-2)]$. Interpréter graphiquement.

Réponses des exercices proposés :

1) $\lim\limits_{q\to-\infty}C_m(q)=+\infty$. Pas d'asymptote "horizontale" en $-\infty$.

$\lim\limits_{q\to+\infty}C_m(q)=0{,}8$. Asymptote "horizontale" d'équation $y=0{,}8$ en $+\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$. Asymptote "verticale" d'équation $x=0$.

Deux asymptotes obliques. En $+\infty$: $y=2x-1$. En $-\infty$: $y=2x-2$.