1 Rappels de cours

Définition 1.1 Soit (u_n) une suite, n_0 un entier naturel.

- On dit que (u_n) est *croissante* à partir du rang n_0 si, pour tout entier $n \geqslant n_0$:
$$u_{n+1} \geqslant u_n.$$
- On dit que (u_n) est *décroissante* à partir du rang n_0 si, pour tout entier $n \geqslant n_0$:
$$u_{n+1} \leqslant u_n.$$
- On dit que (u_n) est *strictement croissante* à partir du rang n_0 si, pour tout entier $n \geqslant n_0$:
$$u_{n+1} > u_n.$$
- On dit que (u_n) est *strictement décroissante* à partir du rang n_0 si, pour tout entier $n \geqslant n_0$:
$$u_{n+1} < u_n.$$
- On dit que (u_n) est *stationnaire* si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n = u_{n+1}$
(si la suite est définie à partir du rang n_0, alors la suite (u_n) est *constante*).

Le cas des suites strictement monotones s'obtient en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Théorème 1.1 Soit (u_n) une suite.

1. Si (u_n) est à termes strictement positifs, alors :
   - si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors (u_n) est croissante ;
   - si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors (u_n) est décroissante.
2. Si (u_n) est à termes strictement négatifs, alors :
   - si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors (u_n) est croissante ;
   - si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors (u_n) est décroissante.

Théorème 1.2 Soit (u_n) la suite définie par la relation $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ (resp. $]a\,;+\infty[$) avec $a \in \mathbb{R}_+$.
Si la fonction f est monotone sur $[a\,;+\infty[$ (resp. $]a\,;+\infty[$), alors la suite (u_n) est monotone sur $[\![\mathrm{E}(a)+1\,;+\infty[\![$ et a même sens de variation que f.

On notera deux choses :

- $\mathrm{E}(a)$ désigne la partie entière de a, c'est le plus grand entier inférieur ou égal à a. On montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathrm{E}(x)$ est l'unique entier vérifiant $\mathrm{E}(x) \leqslant x \leqslant \mathrm{E}(x)+1$;
- les crochets doublés dans la notation d'un intervalle indique qu'il s'agit d'un intervalle d'entiers. En l'occurence, l'intervalle $[\![\mathrm{E}(a)+1\,;+\infty[\![$ est l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à $\mathrm{E}(a)+1$.

2 Méthodes et exemples

On revient à la définition 1.1.

Point méthode 1 Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par $u_n = n^2 - n$.
Étudier les variations de (u_n).

On a, pour tout n de $\mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - n^2 + n = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n = 2n.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $2n \geqslant 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, soit $u_{n+1} \geqslant u_n$.
La suite (u_n) est croissante à partir du rang 0.

Méthode adaptée aux suites dont le terme général contient un produit ou un quotient.

Point méthode 2 Pour étudier le sens de variation d'une suite à termes strictement positifs ou strictement négatifs, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 en s'appuyant sur le théorème 1.1.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, par $u_n = \frac{2^n}{n}$.
Étudier les variations de (u_n).

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $2^n > 0$ donc la suite (u_n) est à termes strictement positifs.
On a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{2^n \times 2}{2^n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{2n}{n+1}.$$

Si $n \geqslant 1$, alors $2n \geqslant n+1$, d'où $\frac{2n}{n+1} \geqslant 1$. Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
La suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.

On s'appuie sur le théorème 1.2.

Point méthode 3 Pour étudier le sens de variation d'une suite explicite, on peut étudier les variations de la fonction associée.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N} - \{0; 1\}$, par $u_n = \sqrt{n-2}$.
Étudier les variations de (u_n).

On a $u_n = f(n)$ où $f : x \mapsto \sqrt{x-2}$, définie sur $[2; +\infty[$. La fonction $x \mapsto x-2$ est strictement croissante sur $[2; +\infty[$ et à valeurs dans $[0; +\infty[$, intervalle sur lequel la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante.
f, en tant que composée de deux fonctions strictement croissante, est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.
D'après le théorème 1.2, la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 2.

Cette méthode concerne les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Point méthode 4 Pour étudier le sens de variation d'une suite récurrente, on peut effectuer un raisonnement par récurrence en s'appuyant sur les variations de la fonction associée.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.
Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

On peut conjecturer, en calculant les premiers termes, que (u_n) est décroissante.

Soit $\mathscr{P}$ la propriété définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $\mathscr{P}(n)$: $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- Montrons que la propriété est initialisée au rang 0.
  Par hypothèses, $u_0 = 4$ et $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{4} = 2$. On en tire $u_1 \leqslant u_0$.
  Ce qui prouve $\mathscr{P}(0)$.
- Montrons que la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire à partir du rang 0.
  Soit $n \geqslant 0$. Supposons $\mathscr{P}(n)$. Alors :
  $$u_{n+1} \leqslant u_n.$$
  Comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, il vient :
  $$\sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{u_n}, \quad \text{soit} \quad u_{n+2} \leqslant u_{n+1}.$$
  Ce qui prouve $\mathscr{P}(n+1)$.

La suite (u_n) est clairement à termes positifs.

On a prouvé que la propriété $\mathscr{P}$ est initialisée au rang 0 et héréditaire à partir du rang 0. Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}(n).$$

Soit :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n.$$

La suite (u_n) est décroissante.

3 Exercices

Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) $u_n = \frac{1}{2n-1}$.

b) $u_n = (-1)^n$.

c) $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 7}$.

d) $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.