1 Rappels de cours

Définition 1.1 Soit (u_n) une suite.

- On dit que (u_n) est *minorée* s'il existe un réel m tel que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.
- On dit que (u_n) est *majorée* s'il existe un réel M tel que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.
- On dit que (u_n) est *bornée* si (u_n) est minorée et majorée. Il existe donc deux réels m et M tels que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$m \leqslant u_n \leqslant M.$$

Théorème 1.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[n_0\,;+\infty[$ où $n_0 \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Si f est minorée (resp. majorée) par a, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par $u_n = f(n)$ est minorée (resp. majorée) par a.

2 Méthodes et exemples

On revient à la définition 1.1.

Point méthode 1 Pour montrer qu'une suite est minorée ou majorée par a, on peut étudier le signe de la différence $u_n - a$.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par $u_n = \frac{n^2+1}{3n^2+5}$.
Déterminer si (u_n) est minorée, majorée ou bornée.

On calcule quelques uns des premiers termes à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice (valeurs arrondies à 10^{-3} près).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	0,2	0,25	0,294	0,312	0,320	0,325	0,327	0,328	0,329	0,330	0,331

On conjecture que (u_n) est bornée par $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{3}$.

- On a, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n - \frac{1}{5} = \frac{n^2+1}{3n^2+5} - \frac{1}{5} = \frac{5(n^2+1)-(3n^2+5)}{5(3n^2+5)} = \frac{2n^2}{5(3n^2+5)} \geqslant 0.$$

  On en tire $u_n \geqslant \frac{1}{5}$. La suite (u_n) est minorée par $\frac{1}{5}$.

- On a, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n - \frac{1}{3} = \frac{n^2+1}{3n^2+5} - \frac{1}{3} = \frac{3(n^2+1)-(3n^2+5)}{3(3n^2+5)} = -\frac{2}{3(3n^2+5)} \leqslant 0.$$

  On en tire $u_n \leqslant \frac{1}{3}$. La suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{3}$.

La suite (u_n) est donc bornée par $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{3}$.

Point méthode 2 Pour montrer qu'une suite est minorée, majorée ou bornée, on peut procéder par manipulation d'inégalités.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, par $u_n = \frac{(-1)^n+\cos^2 n+1}{n}$.
Déterminer si (u_n) est minorée, majorée ou bornée.

On a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \cos^2 n \leqslant 1.$$

On en tire :

$$0 \leqslant (-1)^n + \cos^2 n + 1 \leqslant 3 \qquad [1]$$

De plus, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1 \qquad [2]$$

Par multiplication membre à membre des encadrements [1] et [2] à termes positifs, il vient :

$$0 \leqslant \frac{(-1)^n + \cos^2 n + 1}{n} \leqslant 3.$$

La suite (u_n) est donc bornée par 0 et 3.

On s'appuie sur le théorème 1.1.

Point méthode 3 Pour montrer qu'une suite explicite est minorée, majorée ou bornée, on peut s'appuyer sur les variations de la fonction associée.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par $u_n = \frac{3n^2}{n+1}$.
Déterminer si (u_n) est minorée, majorée ou bornée.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ où $f : x \longmapsto \frac{3x^2}{x+1}$.
f, en tant que fonction rationnelle, est définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$.
Pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{6x(x+1)-3x^2}{(x+1)^2} = \frac{3x^2+6x}{(x+1)^2} = \frac{3x(x+2)}{(x+1)^2} \geqslant 0$.

f est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$.
$f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$.

On dresse alors le tableau de variation de f.

x	0		$+\infty$
f	0	↗	$+\infty$

f est minorée par 0 et non majorée. D'après le théorème 1.1, on en tire que (u_n) est minorée par 0 et non majorée.

Cette méthode concerne les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Point méthode 4 Pour montrer qu'une suite récurrente est minorée, majorée ou bornée, on peut effectuer un raisonnement par récurrence.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{7}$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}$.
Montrer que la suite (u_n) est bornée.

On calcule quelques uns des premiers termes à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice (valeurs arrondies à 10^{-3} près).

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	0,142	0,547	0,682	0,727	0,742	0,747	0,749	0,749

On conjecture ainsi que (u_n) est bornée par 0 et $\frac{3}{4}$.

Soit $\mathscr{P}$ la propriété définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $\mathscr{P}(n) : 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{4}$.

- Montrons que la propriété est initialisée au rang 0.
  Par hypothèse, $u_0 = \frac{1}{7}$. On a $0 \leqslant \frac{1}{7} \leqslant \frac{3}{4}$, soit $0 \leqslant u_0 \leqslant \frac{3}{4}$.
  Ce qui prouve $\mathscr{P}(0)$.
- Montrons que la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire à partir du rang 0.
  Soit $n \geqslant 0$. Supposons $\mathscr{P}(n)$. Alors :
  $$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{4}.$$
  Comme la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, il vient :
  $$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f\left(\frac{3}{4}\right)$$
  Soit :
  $$\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}$$
  D'où :
  $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}.$$
  Ce qui prouve $\mathscr{P}(n+1)$.

On a prouvé que la propriété $\mathscr{P}$ est initialisée au rang 0 et héréditaire à partir du rang 0. Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}(n).$$

Soit :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{4}.$$

La suite (u_n) est bornée par 0 et $\frac{3}{4}$.

3 Exercice

Déterminer si chacune des suites (u_n) est minorée, majorée ou bornée.

a) $u_n = \frac{(-1)^n + \sin n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
b) $u_n = \frac{n+2}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
c) $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 8}$.
d) $u_n = \frac{n^2+3}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
e) $u_n = 2n + \sin n$.
f) $u_n = 30 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5^k}$, $n \in \mathbb{N}$.