Terminale S4	Evaluation de mathématiques n°1 Durée 40 mn	9 septembre 2014

Exercice 1 (4 points)

Montrer par récurrence que si une suite est arithmétique de raison r et de premier terme u_0 alors, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + n\times r$.

- **Initialisation :**

$u_0 + 0\times r = u_0$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité :**

- Hypothèse de récurrence :
Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : $u_k = u_0 + k\times r$..
- Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k+1$: $u_k = u_0 + (k+1)\times r$..

$u_{k+1} = u_k + r$, par définition
$u_k = u_0 + k\times r$., par hypothèse de récurrence donc :

$$u_{k+1} = (u_0 + k\times r) + r = u_0 + k\times r + r = u_0 + (k+1)\times r .$$

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $u_n = u_0 + n\times r$..

Exercice 2 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq 2$.

- **Initialisation :**

$u_0 = 1$ donc $0 < u_0 \leq 2$.

La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité :**

- Hypothèse de récurrence :
Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : $0 < u_k \leq 2$.
- Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k+1$: $0 < u_{k+1} \leq 2$.

$u_{k+1} = \sqrt{2u_k}$, par définition
$0 < u_k \leq 2$, par hypothèse de récurrence donc $0 < 2u_k \leq 4$ puis $0 < \sqrt{2u_k} \leq \sqrt{4}$
soit $0 < \sqrt{2u_k} \leq 2$ ou encore $0 < u_{k+1} \leq 2$.

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang.
D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $0 < u_n \leq 2$.

Exercice 3 (4 points)

1. Déterminer à partir de quel rang la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ appartient à l'intervalle $\left]-10^{-5}\,;10^{-5}\right[$.

$\dfrac{1}{n^2} > 0$ donc $\dfrac{1}{n^2} \in \left]-10^{-5}\,;10^{-5}\right[\iff \dfrac{1}{n^2} < 10^{-5} \iff n^2 > 10^5 \iff n > \sqrt{10^5}$ or $\sqrt{10^5} \approx 316,22$ donc $\dfrac{1}{n^2} \in \left]-10^{-5}\,;10^{-5}\right[\iff \boxed{n \geq 317}$.

2. Quelle conjecture ce résultat nous amène-t-il à émettre.

D'après la définition des suites convergentes, on peut supposer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation : Affecter à n la valeur 1
Affecter à u la valeur 1
Traitement : Tant que $u \geq 10^{-5}$
Affecter à n la valeur $n+1$
Affecter à u la valeur $1/\mathrm{n}^2$
Affichage : Afficher n

Compléter cet algorithme de manière à répondre à la question ***1.***

Exercice 3 (4 × 2 points)

Calculer les limites suivantes

• $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+1\right)\left(n^2+3\right)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+1\right)=1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+3\right)=+\infty$ Par produit, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+1\right)\left(n^2+3\right)=+\infty$	• $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2-2n+1}{n^2+1}$ La lecture directe mène à une forme indéterminée. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2-2n+1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}2=2$
• $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n-3\sqrt{n}\right)$ La lecture directe mène à une forme indéterminée. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n-3\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(2\sqrt{n}-3\right)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\sqrt{n}-3\right)=+\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n-3\sqrt{n}\right)=+\infty$.	• $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-2n^3+1}{1-n^4}$ La lecture directe mène à une forme indéterminée. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-2n^3+1}{1-n^4}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-2n^3}{-n^4}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n}=0$

Question BONUS

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la fonction P_n , définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $P_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} x^k - 1$.

Etudier, pour tout $n \geq 2$, le sens de variation de la suite P_n sur $\mathbb{R}^+$ et préciser $P_n(0)$ et $P_n(1)$.

Pour tout $n \geq 2$, $P_{n+1}(x)-P_n(x)=\left(\sum\limits_{k=1}^{n+1} x^k-1\right)-\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x^k-1\right)=\sum\limits_{k=1}^{n+1} x^k-1-\sum\limits_{k=1}^{n} x^k+1=\sum\limits_{k=1}^{n+1} x^k-\sum\limits_{k=1}^{n} x^k=x^{n+1}\geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$ donc la suite P_n est croissante sur $\mathbb{R}^+$.