Durée : 4 heures

Terminale S3

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (6 points)

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme décimale, éventuellement arrondies à 10^{-3} près.

Lors d'une enquête réalisée par l'infirmière auprès d'élèves de classes de terminale, on apprend que 60% des élèves sont des filles. De plus 40% des filles et 30% des garçons fument.

1. On choisit un élève au hasard. On note A l'événement : « L'élève choisi fume », et $P(A)$ la probabilité de cet événement. On note F l'événement : « L'élève choisi est une fille ».
Quelle est la probabilité que :

a) Cet élève soit un garçon ?

b) Cet élève soit une fille qui fume ?

c) Cet élève soit un garçon qui fume ?

2. Déduire des questions précédentes, en le justifiant, que $P(A) = 0{,}36$.

3. L'enquête permet de savoir que :

- Parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument ;
- Parmi les élèves non fumeurs, 65% ont des parents non fumeurs.

On note B l'événement : « L'élève choisi a des parents fumeurs ».

On notera $P_D(C)$ la probabilité de l'événement C sachant l'événement D.

Dans cette question, on pourra s'aider d'un arbre pondéré.

a) Calculer les probabilités $P(A \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap B)$.

En déduire $P(B)$.

b) Calculer $P_B(A)$, probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents fumeurs.

Calculer $P_{\overline{B}}(A)$, probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs.

Quelle remarque amène la comparaison de ces deux résultats ?

4. On rappelle que, pour chaque élève choisi, la probabilité qu'il soit fumeur est égale à 0,36.
On choisit 10 élèves de terminale au hasard. On admettra que la population d'élèves de terminale est suffisamment grande pour que le choix d'élèves au hasard soit assimilé à un tirage avec remise.

a) Quelle loi de probabilité semble-t-il judicieux d'utiliser. Justifier.

b) Calculer la probabilité qu'aucun de ces dix élèves ne soit fumeur.

c) Calculer la probabilité qu'il y est au moins un élève fumeur.

d) Calculer la probabilité que le nombre d'élèves fumeurs soit compris entre 3 et 7.

Exercice 2 (6 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

1. **Restitution Organisée de connaissances**

a. Montrer que pour tout complexe z et z' : $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

b. Montrer que pour tout complexe z non nul $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ puis en déduire que $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. À tout point *M* d'affixe *z* du plan, on associe le point *M'* d'affixe *z'* définie par : $z' = z^2 + 4z + 3$.

1. Soit $P(z) = z^3 + (3-i)z^2 + 3(1-i)z - 3i$.

a. Calculer $P(i)$.

b. Déterminer *a*, *b* et *c* tels que $P(z) = (z-i)(az^2 + bz + c)$.

c. Déterminer toutes les solutions de l'équations $P(z) = 0$.

2. Un point *M* est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point *M'* associé.
Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique.

3. Soit A le point d'affixe $\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$.

a. Placer les points A et B dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2cm.

b. Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

4. Soit $z = x + iy$, l'affixe de *M*. (On rappelle que *x* et *y* sont réels.)

a. Déterminer $Re(z')$ et $Im(z')$ en fonction de *x* et *y*.

b. Déterminer l'ensemble (E) des points *M* tels que le point *M'* associé soit sur l'axe des réels.

c. Représenter l'ensemble (E) dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Exercice 3 (3 points)

Les trois questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse.
Un point sera attribué pour chaque réponse correctement justifiée. Aucun point ne sera attribué à une réponse non justifiée.

1. Soit *n* un entier naturel. On considère les deux entiers *a* et *b* définis par :
$a = 2n^2 + 7n + 21$ et $b = 2n + 2$.

Affirmation : pour tout entier naturel *n*, le quotient et le reste de la division euclidienne de *a* par *b* sont respectivement égaux à $n + 2$ et à $n + 17$.

2. On considère l'entier $N = 3^{2012}$.
Affirmation : Le reste de la division euclidienne de N par 7 est égal à 6.

3. On considère l'entier $M = 2^{4n+1} + 3^{4n+1}$.
Affirmation : M est divisible par 5 quel que soit l'entier naturel n.

Exercice 4 (5 points)

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée	Demander la valeur de p
Traitement	Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k - 1) - 1,5$ Fin de pour
Sortie	Afficher u

Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.

2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	–0,5	–0,75	–0,375

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ? Justifier.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.
Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

4. Soit v_n la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$.
Démontrer que la suite v_n est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.

5. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5$.

6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).