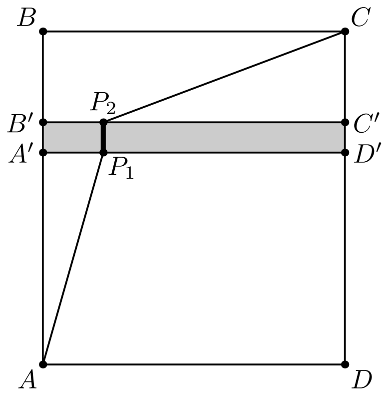
Activité : Où construire le pont ?

Dans cette activité, on va tenter de venir en aide aux constructeurs d'un pont.
$ABCD$ est un parc rectangulaire tel que $AD = 10$ mètres et $AB = 11$ mètres.
Il passe un cours d'eau à travers ce parc. On le matérialise par le rectangle $A'B'C'D'$, tel que $A'D' = 10$ mètres, $A'B' = 1$ mètre et $AA' = 7$ mètres.

But Déterminer où construire le pont pour que le trajet entre les points A et C soit **le plus court possible**.

Partie 1

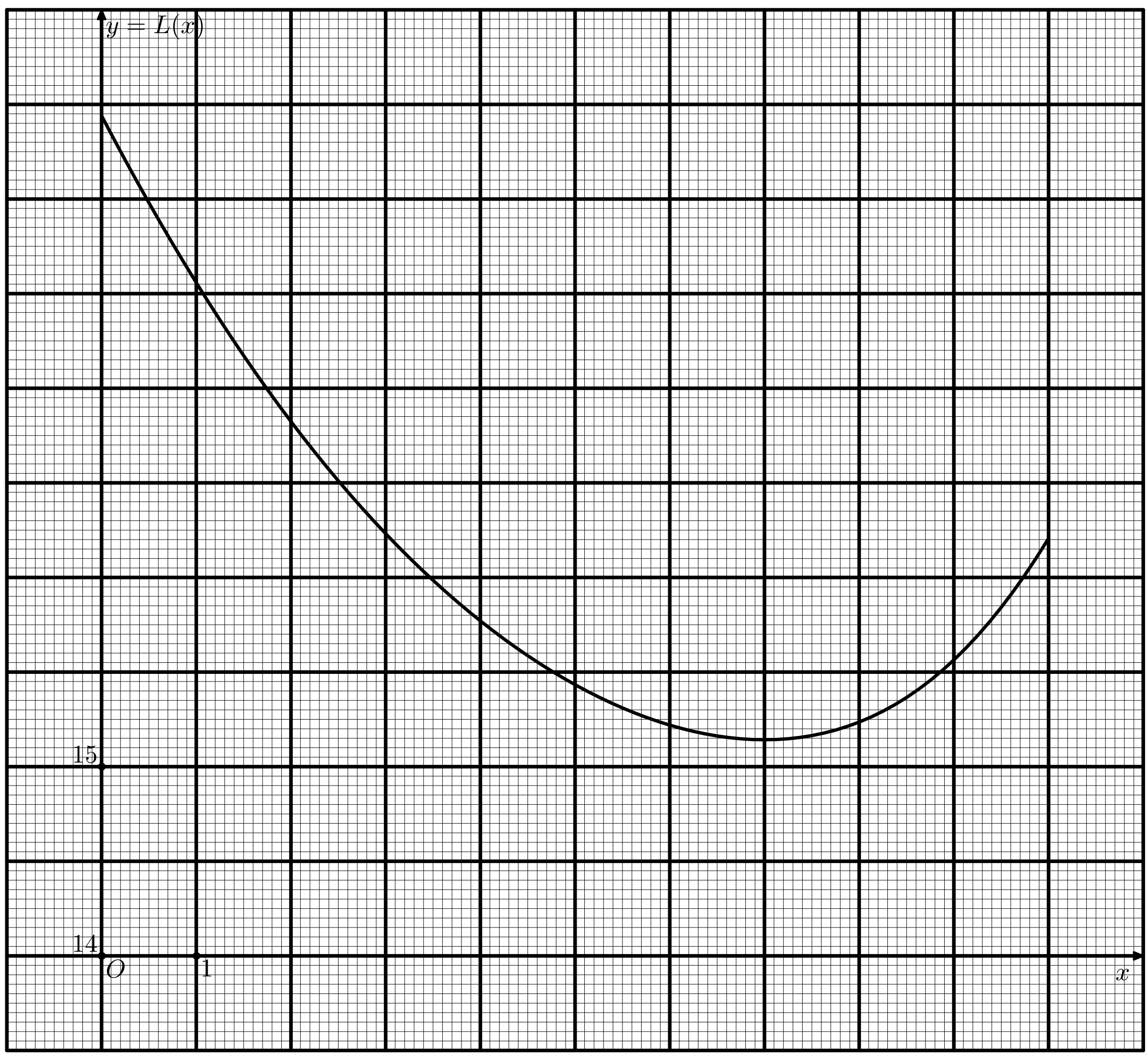


On note L la distance entre A et C. On a donc $L = AP_1 + P_1P_2 + P_2C$.

On peut prouver en utilisant le Théorème de Pythagore que la longueur L du trajet entre A et C en fonction de x est

$$L(x) = \sqrt{49 + x^2} + 1 + \sqrt{(10 - x)^2 + 9}$$

Représentation graphique de L en fonction de x



1. Graphiquement, pour quelle valeur particulière de x (notée α) le trajet entre A et C semble-t-il de longueur minimale, et quelle est cette longueur ?

2. **a.** <u>Compléter :</u>
Lorsque $x \in [0;\alpha]$ augmente, alors $L(x)$.
On dit que la fonction L est sur l'intervalle $[0;\alpha]$: les évolutions de x et $L(x)$ s'effectuent dans des sens contraires.

b. Comment pourrait-on décrire l'allure de la représentation graphique de L lorsque x appartient à $[0;\alpha]$?

c. Prendre au hasard sur l'axe des abscisses deux nombres a et b compris entre 0 et α, et tels que $\boxed{a < b}$.
Comparer alors graphiquement $L(a)$ et $L(b)$.

Si $x \in [0;\alpha]$, quelle est l'influence de la fonction L sur le sens des inégalités ?

3. Reprendre la question **2.** lorsque x appartient à $[\alpha;10]$.

a. Lorsque $x \in [\alpha;10]$ ...

b. Si $x \in [\alpha;10]$, alors $\mathscr{C}_L$ ...

c. Soient a et b dans $[\alpha;10]$ tels que $a < b$ ...

<u>Partie 2 : Tableau de variation</u>

On a pour habitude de représenter d'une manière stylisée la représentation graphique ci-contre où l'on n'écrit que les informations essentielles.

<u>Complétez le tableau de variation suivant :</u>

x	0 10
variations de L	

<u>Bilan</u>

La fonction L est si $x \in [0;\alpha]$ puis si $x \in [\alpha;10]$.
Ainsi, la fonction L admet un minimum lorsque x vaut et ce minimum vaut .