Terminale S3	Evaluation de mathématiques n°3 Durée 55 mn	30 septembre 2015

Exercice 1 (8 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\right)$.

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) :

$$z^3+2z^2-16=0\ .$$

1. ***a.*** Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme $\left(z-2\right)\left(az^2+bz+c\right)=0$ où a, b, c sont trois réels que l'on déterminera.

b. En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique.

2. ***a.*** Placer les points A, B et D d'affixes respectives $z_A=-2-2i$, $z_B=2$ et $z_D=-2+2i$.

b. Calculer l'affixe z_C du point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer C.

Exercice 2 (12 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

1. **Restitution Organisée de connaissances**

a. Montrer que pour tout complexe z et z' : $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$.

b. Montrer que pour tout complexe z non nul $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$ puis en déduire que $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}=\frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

Partie B

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 3 cm.

À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' par l'application f qui admet pour écriture complexe : $z'=\dfrac{(3+4i)z+5\overline{z}}{6}$.

1. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A=1+2i$, $z_B=1$ et $z_C=3i$.
Déterminer les affixes des points A', B', C' images respectives de A, B, C par f.
Placer les points A, B, C, A', B', C'.

2. On pose $z=x+iy$ (avec x et y réels).
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

3. Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $f\left(z\right)=z$ est la droite (D) d'équation $y=\frac{1}{2}x$. Tracer (D). Quelle remarque peut-on faire ?

4. Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f.
Montrer que M' appartient à la droite (D).

5. Montrer que, pour tout nombre complexe z : $\dfrac{z'-z}{z_A}=\dfrac{z+\overline{z}}{6}+i\dfrac{z-\overline{z}}{3}$.

En déduire que le nombre $\dfrac{z'-z}{z_A}$ est réel.