Corrigé de l'évaluation n° 3 du 30 Septembre

Exercice 1 (points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\right)$.

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) :

$$z^3+2z^2-16=0\ .$$

1. ***a.*** Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme $(z-2)\left(az^2+bz+c\right)=0$ où a, b, c sont trois réels que l'on déterminera.

$2^3+2.2^2-16=0$ donc 2 est solution ; on développe :

$(z-2)(az^2+bz+c)=az^3-2az^2+bz^2-2bz+cz-2c=az^3+\left(-2a+b\right)z^2+\left(-2b+c\right)z-2c$

Ainsi $z^3+2z^2-16=(z-2)(az^2+bz+c)$ si et seulement si $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=2 \\ c-2b=0 \\ -2c=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ c=8 \end{cases}$

d'où $\boxed{z^3+2z^2-16=(z-2)(z^2+4z+8)=0}$.

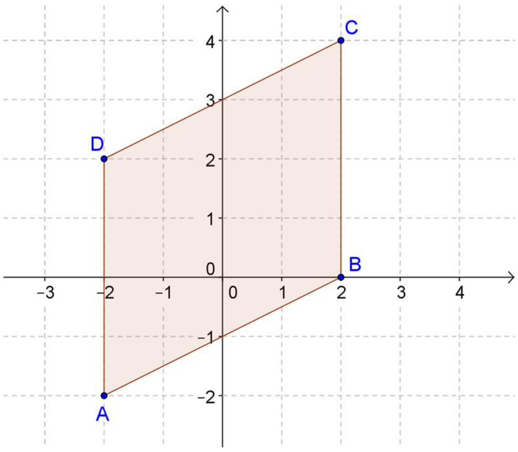
b. En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique.

$(z-2)(z^2+4z+8)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(z=2 \ \ ou \ \ z^2+4z+8=0\right)$

$\Delta_{z^2+4z+8}=16-32=(4i)^2$ d'où les racines $z_1=\dfrac{-4+4i}{2}=-2+2i$, $z_2=\dfrac{-4-4i}{2}=-2-2i$.

$\boxed{\text{Les solutions de (E) sont donc : } -2-2i\text{ , } 2 \text{ et } -2+2i}$.

2. ***a.*** Placer les points A, B et D d'affixes respectives $z_A=-2-2i$, $z_B=2$ et $z_D=-2+2i$.



b. Calculer l'affixe z_C du point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer C.

On doit avoir $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD} \quad\Leftrightarrow\quad z_C-z_B=z_D-z_A \quad\Leftrightarrow\quad z_C=2+(-2+2i)-(-2-2i)$ soit $\boxed{z_C=2+4i}$.

Exercice 3 (points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Restitution Organisée de connaissances (correction dans le cours)

a. Montrer que pour tout complexe z et z' : $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

b. Montrer que pour tout complexe z non nul $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ puis en déduire que $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

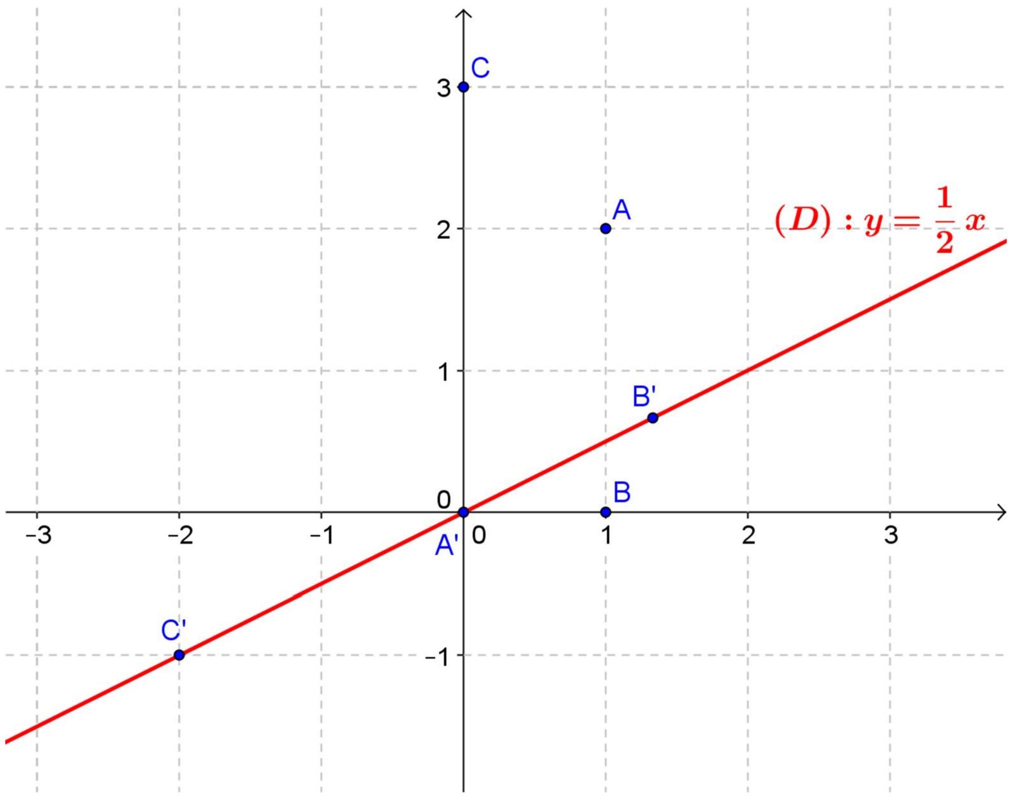
Partie B

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 3 cm.

À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' par l'application f qui admet pour écriture complexe : $z' = \frac{(3+4i)z+5\overline{z}}{6}$.

1. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1$ et $z_C = 3i$.
Déterminer les affixes des points A', B', C' images respectives de A, B, C par f.
Placer les points A, B, C, A', B', C'.

$a' = \frac{(3+4i)(1+2i)+5(1-2i)}{6} = 0$, $b' = \frac{(3+4i)(1)+5(1)}{6} = \frac{8+4i}{6} = \frac{4+2i}{3}$, $c' = \frac{(3+4i)(3i)+5(-3i)}{6} = -2-i$.



2. On pose $z = x + iy$ (avec x et y réels).
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

$x'+iy' = \frac{(3+4i)(x+iy)+5(x-iy)}{6} = \frac{3x-4y+i(3y+4x)+5x-i5y}{6} = \frac{8x-4y}{6} + i\frac{4x-2y}{6}$, soit $x' = \frac{4x-2y}{3}$ et $y' = \frac{2x-y}{3}$.

3. Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $f(z)=z$ est la droite (D) d'équation $y=\frac{1}{2}x$. Tracer (D). Quelle remarque peut-on faire ?

$$f(z)=z \Leftrightarrow z'=z \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x-2y}{3}=x \\ \dfrac{2x-y}{3}=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y=3x \\ 2x-y=3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ 2x-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x.$$

Les points A', B' et C' sont alignés sur cette droite.

4. Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f.
Montrer que M' appartient à la droite (D).

On a $x'=\dfrac{4x-2y}{3}$ et $y'=\dfrac{2x-y}{3}$, soit $y'=\dfrac{1}{2}x'$ donc M' est bien sur (D).

5. Montrer que, pour tout nombre complexe z : $\dfrac{z'-z}{z_A}=\dfrac{z+\bar{z}}{6}+i\dfrac{z-\bar{z}}{3}$.

En déduire que le nombre $\dfrac{z'-z}{z_A}$ est réel.

Repartons de $z'=\dfrac{(3+4i)z+5\bar{z}}{6}$:

$$\frac{z'-z}{1+2i}=\frac{\left(\frac{(3+4i)z+5\bar{z}}{6}-\frac{6z}{6}\right)(1-2i)}{5}=\frac{\left((-3+4i)z+5\bar{z}\right)(1-2i)}{30}=\frac{\left(-3z+4iz+5\bar{z}\right)(1-2i)}{30}$$
$$=\frac{-3z+4iz+5\bar{z}+6iz+8z-10i\bar{z}}{30}=\frac{5z+10iz+5\bar{z}-10i\bar{z}}{30}=5\frac{z+\bar{z}}{30}+10i\frac{z-\bar{z}}{30}=\frac{z+\bar{z}}{6}+i\frac{z-\bar{z}}{3}.$$

Ok.

C'est un réel car $z+\bar{z}=2x$ et $z-\bar{z}=2iy$ donc $\dfrac{z+\bar{z}}{6}+i\dfrac{z-\bar{z}}{3}.=\dfrac{2x}{6}+i\dfrac{2iy}{3}=\dfrac{2x-4y}{6}=\dfrac{x-2y}{3}$.

On pouvait remplacer z par $x+iy$:

$$\frac{z'-z}{z_A}=\frac{\frac{1}{3}(4x-2y-3x)+i\frac{1}{3}(2x-y-3y)}{1+2i}=\frac{1}{3}\frac{(x-2y)+i(2x-4y)}{1+2i}\frac{1-2i}{1-2i}$$
$$=\frac{1}{15}\left[(x-2y+4x-8y)+i(2x-4y-2x+4y)\right]=\frac{5x-10y}{15}=\frac{x-2y}{3}.$$

Ce qui donnait le résultat directement.