**Terminale S DS de Mathématiques *le 19/11/2015***

**Durée : 4 heures**

**Terminale S3**

**Les calculatrices sont autorisées.**

***Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.***

***La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l’appréciation des copies.***

### Exercice 1 (5 points)

Soit f la fonction définie sur par :

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé .

1. Montrer que f peut s’écrire sous la forme :
2. ***a.*** Calculer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.

***b.*** Déterminer les asymptotes éventuelles à la courbe C.

***c.*** Etudier la position relative de la courbe C et de la droite D d’équation :

1. On admet que le tableau de variations de f est le suivant :
2. Montrer que l’équation admet une unique solution α dans l’intervalle .
3. Donner une valeur approchée de α à 10-2 près par défaut.
4. Combien l’équation admet-elle de solutions dans l’intervalle ? Justifier.
5. Quels sont les points d’intersection de C avec l’axe des ordonnées ? l’axe des abscisses ?
6. Tracer dans le repère les asymptotes, la courbe C, la droite D, 𝛼 et les points d’intersection avec les axes (unités : 1cm ou un carreau).

### Exercice 2 (5 points)

On donne les matrices  et .

**Partie A**

1. Déterminer la matrice . On donne .
2. Vérifier que .
3. En déduire que *M* est inversible et que .

**Partie B** : Étude d’un cas particulier

On cherche à déterminer trois nombres entiers *a*, *b* et *c* tels que la parabole d’équation  passe par les points *A*(1 ; 1), *B*(–1 ; –1) et *C*(2 ; 5).

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers *a*, *b* et *c* tels que .
2. Calculer les nombres *a*, *b* et *c* et vérifier que ces nombres sont des entiers.

**Partie C** : Retour au cas général

Les nombres *a*, *b*, *c* , *p* , *q* , *r* sont des entiers.

Dans un repère , on considère les points *A*(1 ; *p*), *B*(–1 ; *q*) et *C*(2 ; *r*).

On cherche des valeurs de *p*, *q* et *r* pour qu’il existe une parabole d’équation  passant par *A*, *B* et *C*.

1. Démontrer que si  avec *a*, *b* et *c* entiers, alors 
2. En déduire que 
3. Réciproquement, on admet que si et si *A*, *B*, *C* ne sont pas alignés, alors il existe trois entiers *a*, *b* et *c* tels que la parabole d’équation passe par les points *A*, *B* et *C*.
4. Montrer que les points *A*, *B* et *C* sont alignés si et seulement si 2*r* + *q* – 3*p* = 0.
5. On choisit *p* = 7. Déterminer des entiers *q*, *r*, *a*, *b* et *c* tels que la parabole d’équation  passe par les points *A*, *B* et *C*.

### Exercice 3 (5 points)

*Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.*

Lors d’une épidémie chez des bovins, on s’est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d’animaux dont 1 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

• si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;

• si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d’utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :

M l’évènement : « l’animal est porteur de la maladie » ;

T l’évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
3. Quelle est la probabilité qu’il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
4. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.
5. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu’il soit porteur de la maladie ?
6. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d’assimiler les tirages à des tirages avec remise.

On note *X* la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d’animaux ayant un test positif.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par *X* ?
2. Quelle est la probabilité pour qu’au moins un des cinq animaux ait un test positif ?
3. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l’abattage d’un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

D’après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Coût | 0 | 100 | 1 000 |
| Probabilité | 0,9405 | 0,0580 | 0,001 5 |

1. Calculer l’espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
2. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d’engager ?

### Exercice 4 (5 points)

L’objet de cet exercice est d’étudier la suite  définie sur ℕ par *u*0 = 3 et pour tout entier naturel *n*,

 (1) .

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel *n*, .

1. On désigne par *f* la fonction définie sur l’intervalle  par .

Démontrer que la fonction *f* admet un minimum. En déduire que pour tout entier naturel *n*, .

1. ***a.*** Soit *n* un entier naturel quelconque. Étudier le signe de .

***b.*** Pourquoi peut-on en déduire que la suite  est convergente ?

***c.*** On déduit de la relation (1) que la limite *L* de cette suite est telle que .

Déterminer *L*.

1. Démontrer que pour tout entier naturel *n*, .
2. On définit la suite  par : *d*0 = 1 et pour tout entier naturel *n*, .

***a.*** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, .

***b.*** Voici un algorithme :

|  |  |
| --- | --- |
| Variables | *n* et *p* sont des entiers naturels,  *d* est un réel. |
| Entrée | Demander à l’utilisateur la valeur de *p*. |
| Initialisations | Affecter à *d* la valeur 1.  Affecter à *n* la valeur 0. |
| Traitement | Tant que *d* > 10−*p*.  Affecter à *d* la valeur 0,5*d 2*  Affecter à *n* la valeur *n* + 1.  Fin tant que |
| Sortie | Afficher *n*. |

En entrant la valeur 9, l’algorithme affiche le nombre 5. Quelle inégalité peut-on en déduire pour  ?

Justifier que  est une valeur approchée de  à  près.