Terminale S3	Evaluation de mathématiques n°4 Durée 2h	Mercredi 9 décembre 2015

1ère partie : Fonction exponentielle

Exercice 1

Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes

1. Vrai ou Faux ? (Justifier)

   a. $\exp(1-x) = \frac{e}{\exp(x)}$

   b. $\frac{e^{3x}}{e^x} = e^3$

2. Démontrer que pour tout réel x on a : $\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^3+x^2-1}$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

   a. l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.

   b. l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

Exercice 2 - Inspiré de Antilles Guyane Juin 2014

Question préliminaire : On admet que pour tout réel x, $e^x > x$.

On définit la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

1. Etudier les variations de g sur $[0\,;\,+\infty[$ et en déduire son signe (la limite en $+\infty$ n'est pas demandée).
2. En déduire que pour tout réel positif, $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ puis que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = x+1+\frac{x}{e^x}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1-x+e^x$.

   Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues). En déduire le signe de $g(x)$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}g(x)$.
4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.

   Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.
6. ***a.*** Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

   b. Étudier la position relative de la courbe C et de la droite T.

$2^{\text{ème}}$ partie : Nombres complexes

Exercice 1 (2,5 pts)

Donner sans calcul, par des considérations géométriques un argument de chacun des nombres complexes suivant :

a) $1+i$ b) $-1-i$ c) 5 d) -13π e) $-3i$

Exercice 2 (3 pts)

Déterminer dans chaque cas une forme trigonométrique de z.

a) $z = 3 + 3i\sqrt{3}$ b) $z = \frac{1}{1-i}$ c) $z = \frac{3(1+i\sqrt{3})}{1-i}$

Exercice 3 (1 pt)

Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $z = (3-3i)^5$

Exercice 4 (1,5 pts)

On donne dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -2 \text{ , } z_B = 1+i \text{ et } z_C = -1-3i \text{ .}$$

Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 5

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$.

On sait que pour 2 points distincts A d'affixe z_A et B d'affixe z_B on a $\left(\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}\right) = arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$.

1) Montrer que pour tout point C d'affixe z_C et D d'affixe z_D on a $\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}\right) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$.
2) On donne $z_A = -2+2i$, $z_B = 2+2i$ et $z_C = 4i$.
   a) Calculer $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right|$ et $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)$.
   b) En déduire la nature du triangle ABC.