## 1ère partie : Fonction exponentielle

**Exercice 1** Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes

1. Vrai ou Faux ? (Justifier)

   a. $\exp(1-x) = \frac{e}{\exp(x)}$

VRAI : $\frac{e}{\exp(x)} = \exp(1)\times\exp(-x) = \exp(1-x)$

   b. $\frac{e^{3x}}{e^x} = e^3$

FAUX : $\frac{e^{3x}}{e^x} = e^{3x}\times e^{-x} = e^{3x-x} = e^{2x}$

2. Démontrer que pour tout réel $x$ on a : $\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} = \frac{e^x-e^xe^{-x}}{e^x+e^xe^{-x}} = \frac{e^x-1}{e^x+1}$.

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^3+x^2-1}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+x^2-1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^3+x^2-1} = 0$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

   a. l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.

$e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow e^{x^2-3} = e^{-2x} \Leftrightarrow x^2-3 = -2x \Leftrightarrow x^2+2x-3=0$.

Résolution de $x^2+2x-3=0$ : $\Delta = 16$ donc l'équation admet deux solutions distinctes qui sont 1 et -3.

Finalement l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$ admet deux solutions : $x = 1$ et $x = -3$.

   b. l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

$e^{4x-1} \geq 1 \Leftrightarrow e^{4x-1} \geq e^0 \Leftrightarrow 4x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$.

**Exercice 2 - Inspiré de Antilles Guyane Juin 2014**

**Question préliminaire :** On admet que pour tout réel $x$, $e^x > x$.

On définit la fonction $g$ sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

1. Etudier les variations de $g$ sur $[0\,;\,+\infty[$ et en déduire son signe (la limite en $+\infty$ n'est pas demandée).

$g'(x) = e^x - x$ or $e^x > x$ pour tout réel $x$ donc sur $[0\,;\,+\infty[$. Par conséquent $g$ est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$. De plus $g(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$, on peut donc en déduire que $g$ est strictement positive sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. En déduire que pour tout réel positif, $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ puis que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

$g(x) = e^x - \frac{x^2}{2} > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ donc $e^x > \frac{x^2}{2}$ et $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ , le théorème d'encadrement permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

## Etude d'une fonction

On considère la fonction $f$ définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = x+1+\frac{x}{e^x}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Soit $g$ la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1-x+e^x$.

   Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$ (les limites de $g$ aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues). En déduire le signe de $g(x)$.

$g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison simple de fonctions qui le sont, et pour tout réel $x$ :

$g'(x) = -1+\mathrm{e}^x$. On a alors $g'(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 0$.

Le tableau de variations de $g$ est donc:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | |

On déduit du tableau précédent que, pour tout réel $x$, $g(x) \geqslant 2 > 0$.

2. Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$ puis la limite de $f$ en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = -\infty$ donc, par somme: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$ et, par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$, donc, par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. On appelle $f'$ la dérivée de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

   Démontrer que, pour tout réel $x$, $f'(x) = e^{-x}g(x)$.

Pour tout réel $x$, on a:

$$f'(x) = 1+\frac{1\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2} = 1+\frac{\mathrm{e}^x(1-x)}{\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^x} = 1+\frac{1-x}{\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^x+1-x}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x}g(x).$$

4. En déduire le tableau de variation de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

On a vu plus haut que, pour tout réel $x$, $g(x) > 0$, et comme par ailleurs $\mathrm{e}^{-x} > 0$, on en déduit que $f'(x) > 0$.

On obtient alors le tableau de variations suivant:

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle $\alpha$ sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.

La fonction $f$ est continue sur $]-\infty\,;+\infty[$, strictement croissante. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'intervalle $]-\infty\,;+\infty[$ a pour image $]-\infty\,;+\infty[$, ce dernier intervalle contenant 0, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ possède dans $\mathbb{R}$ une solution $\alpha$ unique.

Par ailleurs, $f(-1) = -\mathrm{e}^{-1} < 0$ et $f(0) = 1 > 0$, donc: $-1 < \alpha < 0$.

6. a. Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente $T$ a pour équation réduite: $y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = 2x+1$.

b. Étudier la position relative de la courbe C et de la droite T.

Pour tout réel $x$, $f(x)-(2x+1) = x+1+\dfrac{x}{e^x}-(2x+1) = -x+\dfrac{x}{e^x} = \dfrac{x}{e^x}\left(-e^x+1\right)$

Dressons alors un tableau de signes:

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $1-\mathrm{e}^x$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $k(x)$ | | $-$ | 0 | $-$ | |

On en déduit que $\mathcal{C}$ est située en dessous de $T$.

## $2^{\text{ème}}$ partie : Nombres complexes

**Exercice 1** (2,5 pts)

Donner sans calcul, par des considérations géométriques un argument de chacun des nombres complexes suivant :

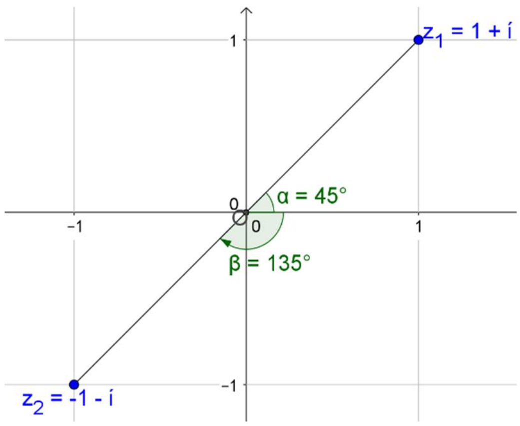
a) $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$

b) $arg(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}$

c) $\arg(5) = 0$

d) $\arg(-13\pi) = \pi$

e) $\arg(-3i) = -\frac{\pi}{2}$



**Exercice 2** (3 pts)

Déterminer dans chaque cas une forme trigonométrique de $z$.

a) $z = 3 + 3i\sqrt{3}$

$|z| = |3+3i\sqrt{3}| = 3|1+i\sqrt{3}| = 3\sqrt{2}$ on en déduit que $z = 3+3i\sqrt{3} = 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

b) $z = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

$|z| = \left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{1}{2}|1+i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ on en déduit que $z = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

c) On remarque que $z = \frac{3+3i\sqrt{3}}{1-i}$ donc d'après a) et b) : $|z| = \left|\frac{3+3i\sqrt{3}}{1-i}\right| = \frac{|3+3i\sqrt{3}|}{|1-i|} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}/2} = 6$ et

$\arg(z) = \arg\left(\left(3+3i\sqrt{3}\right)\times\frac{1}{1-i}\right) = \arg\left(3+3i\sqrt{3}\right)+\arg\left(\frac{1}{1-i}\right) = \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$ .

On en déduit que $z = 6\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

**Exercice 3** (1 pt)

Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $z = (3-3i)^5$

$|3-3i| = 3|1-i| = 3\sqrt{2}$ et $\arg(3-3i) = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$

On en déduit $|z| = \left(3\sqrt{2}\right)^5 = 972\sqrt{2}$ et $\arg z = 5\times\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}-2\pi$ donc

$$z = 972\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 972\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -972+972i\,.$$

**Autre méthode :**

$$\begin{aligned} z &= (3-3i)^5 = \left(3(1-i)\right)^5 = 3^5(1-i)^5 \\ &= 243(1-i)^2\times(1-i)^2\times(1-i) \\ &= 243(-2i)\times(-2i)\times(1-i) \\ &= 243(-4)(1-i) \\ &= -972+972i \end{aligned}$$

**Exercice 4** (1,5 pts)

On donne dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -2$ , $z_B = 1+i$ et $z_C = -1-3i$ . Quelle est la nature du triangle ABC ?

$AB = |z_B - z_A| = |3+i| = \sqrt{10}$

$AC = |z_C - z_A| = |1-3i| = \sqrt{10}$

$BC = |z_C - z_B| = |-2-4i| = \sqrt{20}$

On remarque que AB = AC donc le triangle ABC est isocèle.

De plus $BC^2 = AC^2 + AB^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle en A.

Le triangle ABC est rectangle isocèle de sommet A.

## Exercice 5

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$.

On sait que pour 2 points distincts A d'affixe $z_A$ et B d'affixe $z_B$ on a $(\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}) = arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$.

1) Montrer que pour tout point C d'affixe $z_C$ et D d'affixe $z_D$ on a $(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$.

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{AB}\,,\vec{u}) + (\vec{u}\,,\overrightarrow{CD})\\ &= -(\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}) + (\vec{u}\,,\overrightarrow{CD})\\ &= -arg(z_B - z_A) + arg(z_D - z_C)[2\pi]\\ &= arg(z_D - z_C) - arg(z_B - z_A)[2\pi] = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]\end{aligned}$$

2) On donne $z_A = -2 + 2i$ , $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = 4i$.

a) Calculer $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right|$ et $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)$.

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{2-2i}{-2-2i} = \frac{1-i}{-1-i} = \frac{(1-i)(-1+i)}{2} = \frac{2i}{2} = i \text{ donc}$$

$$\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = |i| = 1 \text{ et } arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi].$$

b) En déduire la nature du triangle ABC.

D'une part, $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = 1 \iff |z_B - z_C| = |z_A - z_C| \iff CB = CA$ donc ABC est isocèle de sommet C

d'autre part, $arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \iff (\overrightarrow{CA}\,,\overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc ABC est rectangle en C.

Le triangle ABC est rectangle isocèle de sommet C.