Terminale S3	Evaluation de mathématiques n°1 Durée 55 mn	5 septembre 2016

Votre rédaction devra être irréprochable !

Exercice 1 (3 points)

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = 2v_n - 7$ pour tout entier naturel n.
Démontrer par récurrence que $v_n = 7 - 3 \times 2^n$ pour tout $n > 0$.

On considère la propriété : « $v_n = 7 - 3 \times 2^n$».
• Initialisation : Pour $n = 1$, on a $v_1 = 2v_0 - 7 = 8 - 7 = 1$ et $7 - 3 \times 2^1 = 1$.
On a donc bien $v_1 = 7 - 3 \times 2^1$: la propriété est vraie pour $n = 1$.

• Hérédité : On va montrer que si la propriété est vraie à un certain rang $n > 0$ alors elle est vraie au rang $n + 1$.
Supposons donc que $v_n = 7 - 3 \times 2^n$
(on suppose la propriété vraie pour n : c'est l'hypothèse de récurrence), on a alors :

$2v_n = 2(7 - 3 \times 2^n)$ (par l'hypothèse de récurrence)

$2v_n - 7 = 2(7 - 3 \times 2^n) - 7$

$2v_n - 7 = 14 - 3 \times 2^{n+1} - 7$

$v_{n+1} = 7 - 3 \times 2^{n+1}$

On a donc bien $v_{n+1} = 7 - 3 \times 2^{n+1}$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n + 1$.

• Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n > 0$ c'est-à-dire que $v_n = 7 - 3 \times 2^n$ pour tout $n > 0$.

Exercice 2 (4 points)

Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 4$ et $w_{n+1} = \frac{1}{3}w_{n+1} - 2w_n$ pour tout entier naturel n.

a) La suite est-elle arithmétique ? géométrique ?

$$w_{n+1} = \frac{1}{3}w_{n+1} - 2w_n \Leftrightarrow w_{n+1} - \frac{1}{3}w_{n+1} = -2w_n \Leftrightarrow \frac{2}{3}w_{n+1} = -2w_n \Leftrightarrow w_{n+1} = -3w_n$$

C'est la définition d'une suite géométrique de raison -3 et de premier terme $w_0 = 4$.

b) Etudiez les variations de la suite (w_n) .

Comme (w_n) est géométrique, on a $w_n = 4 \times (-3)^n$ pour tout entier naturel n.
$w_{n+1} - w_n = 4 \times (-3)^{n+1} - 4 \times (-3)^n = 4 \times (-3)^n \times (-3 + 1) = -8 \times (-3)^n$.
Le signe de cette expression n'est pas constant puisque $(-3)^n$ est positif lorsque n est pair et négatif sinon.
La suite n'admet donc pas de variations.

Exercice 3 (3 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3$ pour tout entier naturel n.
Montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

On veut montrer que $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq 0$
On considère la propriété : « $u_{n+1} \leq u_n$».
• Initialisation : Pour $n = 0$, on a $v_0 = 5$ et $u_1 = \frac{1}{5}u_0 + 3 = 4$.
On a donc bien $u_1 \leq u_0$: la propriété est vraie pour $n = 0$.

• Hérédité : On va montrer que si la propriété est vraie à un certain rang $n \geq 0$ alors elle est vraie au rang $n + 1$.
Supposons donc que $u_{n+1} \leq u_n$
(on suppose la propriété vraie pour n : c'est l'hypothèse de récurrence), on a alors :

$\frac{1}{5} \times u_{n+1} \leq \frac{1}{5} \times u_n$ (par l'hypothèse de récurrence)

$$\frac{1}{5} \times u_{n+1} + 3 \leq \frac{1}{5} \times u_n + 3$$

$$u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

On a donc bien $u_{n+2} \leq u_{n+1}$, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n + 1$.

• Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire ; donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geq 0$ c'est-à-dire que $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq 0$: la suite est bien décroissante.

Exercice 4 (4 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n > 0$.

a) Déterminer n tel que $|u_n| < 10^{-3}$.

$|u_n| < 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{1}{10^{-3}} < n^2 \Leftrightarrow 10^3 < n^2$ soit $n > \sqrt{10^3} \geq 32$.

b) Soit e un réel strictement positif choisi arbitrairement.
Montrer qu'il existe un rang N à partir duquel $|u_n| < e$.
Que peut-on en déduire ?

$|u_n| < e \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < e \Leftrightarrow \frac{1}{e} < n^2$ soit $n > \sqrt{\frac{1}{e}}$. Il suffit de prendre $N = E\left(\sqrt{\frac{1}{e}}\right) + 1$

(où $E\left(\sqrt{\frac{1}{e}}\right)$ désigne la partie entière du nombre $\sqrt{\frac{1}{e}}$.)

Ceci montre que la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 5 (4 × 1,5 points)

Calculer les limites suivantes

• $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)\left(n^2+3\right)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)=1$ $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+3\right)=+\infty$ Par produit, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)\left(n^2+3\right)=+\infty$	• $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^2-2n+1}{n^2+1}$ La lecture directe mène à une forme indéterminée. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^2-2n+1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}2=2$
• $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n-3\sqrt{n}\right)$ La lecture directe mène à une forme indéterminée. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n-3\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(2\sqrt{n}-3\right)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\sqrt{n}-3\right)=+\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n-3\sqrt{n}\right)=+\infty$.	• $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2n^3+1}{1-n^4}$ La lecture directe mène à une forme indéterminée. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2n^3+1}{1-n^4}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2n^3}{-n^4}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0$

Question BONUS

Pour tout entier $n\geq 2$, on considère la fonction P_n , définie pour tout $x\in\mathbb{R}$, par :

$$P_n(x)=\sum_{k=1}^{n}x^k-1\ .$$

Etudier, pour tout $n\geq 2$, le sens de variation de la suite P_n sur $\mathbb{R}^+$ et préciser $P_n(0)$ et $P_n(1)$.

Pour tout $n\geq 2$,

$$\begin{aligned}P_{n+1}(x)-P_n(x)&=\left(\sum_{k=1}^{n+1}x^k-1\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}x^k-1\right)\\&=\sum_{k=1}^{n+1}x^k-1-\sum_{k=1}^{n}x^k+1\\&=\sum_{k=1}^{n+1}x^k-\sum_{k=1}^{n}x^k\\&=x^{n+1}>0\ \ sur\ \mathbb{R}^+\end{aligned}$$

La suite P_n est donc strictement croissante.

$P_n(0)=-1$ et $P_n(1)=0$