**Durée : 4 heures.**

# OBLIGATOIRE

**Les calculatrices sont autorisées.**

***Le sujet est composé de quatre exercices indépendants. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.***

## *Exercice 1 (7 points)* Polynésie Juin 2010 (Extrait) et Polynésie Juin 2015 modifiés

Les trois parties de cet exercice sont entièrement indépendantes.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$.

**Partie A - Restitution organisée de connaissances**

Prérequis

Soit $z$ un nombre complexe tel que $z = a + ib$ où $a$ et $b$ sont deux nombres réels.
On note $\bar{z}$ le nombre complexe défini par $\bar{z} = a - ib$.

Questions

***a.*** Démontrer que, pour tous nombres complexes $z$ et $z'$, $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$.

***b.*** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, et tout nombre complexe $z$, $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.

**Partie B**

On considère l'équation $(E)$ : $z^4 = -4$ où $z$ est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe $z$ est solution de l'équation $(E)$ alors les nombres complexes $-z$ et $\bar{z}$ sont aussi solutions de l'équation $(E)$.
2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$.
   Vérifier que $z_0$ est solution de l'équation (E).
3. Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

**Partie C**

À tout point $M$ d'affixe $z$ du plan, on associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par : $z' = z^2 + 4z + 3$.

1. Un point $M$ est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point $M'$ associé.
   Démontrer qu'il existe deux points invariants.
   Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique.
2. Soit A le point d'affixe $\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$.
   Montrer que $OAB$ est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble $(E)$ des points $M$ d'affixe $z = x + iy$ où $x$ et $y$ sont réels, tels que le point $M'$ associé soit sur l'axe des réels.
4. Dans le plan complexe, représenter les points $A$ et $B$ ainsi que l'ensemble $(E)$.

## *Exercice 2 (3 points)* ***Pondichéry Avril 2015 modifié***

Soit $(u_n)$ la suite définie par son premier terme $u_0$ et, pour tout entier naturel $n$, par la relation $u_{n+1} = au_n + b$ ($a$ et $b$ réels non nuls tels que $a \neq 1$).

On pose, pour tout entier naturel $n$, $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $a$.
2. En déduire que si $a$ appartient à l'intervalle $]-1\,;\,1[$, alors la suite $(u_n)$ a pour limite $\frac{b}{1-a}$.
3. On considère l'algorithme ci-contre obtenu avec Algobox.
   ***a.*** Qu'affiche cet algorithme lorsque $a = 2$, $b = 1$, $U0 = -1$ et $Seuil = 0{,}01$.
   ***b.*** Quel est le rôle de cet algorithme ?

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  Seuil EST_DU_TYPE NOMBRE
  U0 EST_DU_TYPE NOMBRE
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  Limite EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE U0
  LIRE Seuil
  U PREND_LA_VALEUR U0
  N PREND_LA_VALEUR 0
  Limite PREND_LA_VALEUR b/(1-a)
  SI (a>-1 ET a<1) ALORS
    DEBUT_SI
    TANT_QUE (abs(U-Limite)>Seuil) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      U PREND_LA_VALEUR a*U+b
      N PREND_LA_VALEUR N+1
      FIN_TANT_QUE
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      AFFICHER "Impossible car la suite diverge"
      FIN_SINON
  AFFICHER N
FIN_ALGORITHME
```

## *Exercice 3 (5 points)* **Centres étrangers (Maroc) – Septembre 2010 (5 points) non modifié**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 6 - \dfrac{5}{x+1}$.

Le but de cet exercice est d'étudier des suites $(u_n)$ définies par un premier terme positif ou nul $u_0$ et vérifiant pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = f(u_n)$.

*1.* **Étude de propriétés de la fonction *f***

***a.*** Étudier le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

***b.*** Résoudre dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ l'équation $f(x) = x$. On note $\alpha$ la solution.

***c.*** Montrer que si $x$ appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha[$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha[$.

De même, montrer que si $x$ appartient à l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$.

*2.* **Étude de la suite $(u_n)$ pour $u_0 = 0$**

Dans cette question, on considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

***a.*** Sur le graphique donné en **annexe**, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.
Placer le point $A_0$ de coordonnées ($u_0$ ; 0), et, en utilisant ces courbes, construire à partir de $A_0$ les points $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$ d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$.
Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite $(u_n)$ ?

***b.*** Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel $n$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

***c.*** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

*3.* **Étude des suites $(u_n)$ selon les valeurs du réel positif ou nul $u_0$**

*Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite $(u_n)$ suivant les valeurs du réel positif ou nul $u_0$ ?

## *Exercice de Spécialité (5 points)*

**Partie A**

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

- **Proposition 1** : « Pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».
- **Proposition 2 :** « Si un entier relatif $x$ est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0$ [6], alors $x \equiv 0$ [3] ».
- Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture $\overline{abc}$ en base dix et N a pour écriture $\overline{bca}$ en base dix ($a$, $b$ et $c$ sont donc des entiers naturels compris entre 0 et 9).
  **Proposition 3** : « Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier M − N est aussi divisible par 27. »

**Partie B**

Démontrer que pour tout entier $n$, $n^2$ est congru soit à 0, soit à 1, soit à 4 modulo 8.
Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$ l'équation :$(n+3)^2 - 1 \equiv 0$ [8].

**Partie C**

Déterminer le reste dans la division euclidienne $10^{2011}$ par 7.

## *Exercice 4 (5 points) Polynésie Juin 2007 (5 points) modifié*

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'événement « le jeton tiré est blanc » et G l'événement « le joueur gagne le jeu ». L'événement contraire d'un événement $E$ est noté $\bar{E}$ . La probabilité d'un événement est notée $p(E)$.

**Partie A**

***1.*** Montrer que $p(\mathrm{G})=\frac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

***2.*** Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?

***3.*** Un joueur fait huit parties de façon indépendante. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de parties gagnées.

   ***a.*** Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X (justifier).

   ***b.*** Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement cinq et en donner une valeur approchée à $10^{-3}$ près.

   ***c.*** Calculer la probabilité qu'il en gagne au moins 4 et en donner une valeur approchée à $10^{-3}$ près.

**Partie B**

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paye 1 euro par partie ;
- si le joueur gagne la partie il reçoit 5 euros ;
- si le joueur perd la partie il ne reçoit rien.

***1.*** On note Y la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.

   ***a.*** Donner la loi de probabilité de Y et son espérance mathématique.

   ***b.*** Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?

***2.*** L'organisateur décide de modifier le nombre $n$ de jetons noirs ($n$ entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier $n$ le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

# Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Nom :…………………..
Prénom :………………..

Exercice 3