Exercice 1 (7 points) Polynésie Juin 2010 (Extrait) et Polynésie Juin 2015 modifiés

Les trois parties de cet exercice sont entièrement indépendantes.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Prérequis

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels.
On note $\bar{z}$ le nombre complexe défini par $\bar{z} = a - ib$.

Questions

a. Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$.

D'une part :

$\overline{z \times z'} = \overline{(a + ib) \times (a' + ib')}$
$= \overline{(aa' + iba' + ib'a + i^2bb')} = \overline{(aa' - bb') + i(ba' + b'a)} = (aa' - bb') - i(ba' + b'a)$ car $aa' - bb' \in \mathbb{R}$ et $ba' + b'a \in \mathbb{R}$.

D'autre part :

$\bar{z} \times \bar{z'} = \overline{(a + ib)} \times \overline{(a' + ib')}$
$= (a - ib) \times (a' - ib') = aa' - aib' - iba' + i^2bb' = (aa' - bb') - i(ab' + ba')$.

On a donc bien $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, et tout nombre complexe z, $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.

Recourons à un raisonnement par récurrence.

Notons P_n la propriété : « $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ » avec $n \geq 1$.

→ *Initialisation* : $\overline{z^1} = \bar{z}$ et $(\bar{z})^1 = \bar{z}$ donc on a $\overline{z^1} = (\bar{z})^1$, soit P_1 vraie (1) ;

→ *Hérédité* : Supposons que P_n soit vraie ; alors :

$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} \underbrace{=}_{\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}} \overline{z^n} \times \bar{z} \underbrace{=}_{H.R.} (\bar{z})^n \times \bar{z} = (\bar{z})^{n+1}$, soit P_{n+1} vraie (si P_n vraie) (2)

De (1) et (2), il résulte que P_n vraie pour tout $n \geq 1$.

Partie B

On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\bar{z}$ sont aussi solutions de l'équation (E).

z étant supposé solution de (E) , $z^4 = -4$ d'où :

→ $(-z)^4 = z^4 = -4 \Rightarrow -z$ solution de (E) ;

→ $(\bar{z})^4 = \overline{z^4} = \overline{-4} = -4 \Rightarrow \bar{z}$ solution de (E).

Ceci montre que si z est solution de (E) alors $-z$ et $\bar{z}$ sont aussi solutions de (E) :

2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$.
Vérifier que z_0 est solution de l'équation (E).

z_0 est solution de (E) si et seulement si $z_0^4 = -4$.
Or $z_0^4 = (1 + i)^4 = (1 + i)^2(1 + i)^2 = (1 + 2i + i^2)(1 + 2i + i^2) = (2i)(2i) = 4i^2 = -4$ donc z_0 est bien solution de l'équation (E).

Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

$$z_0 \text{ est solution de (E)} \Rightarrow \begin{cases} -z_0 \text{ est solution de (E)} \Rightarrow \begin{cases} -(-z_0) = z_0 \text{ est solution de (E)} \\ \overline{-z_0} = -\bar{z_0} \text{ est solution de (E)} \end{cases} \\ \bar{z_0} \text{ est solution de (E)} \Rightarrow \begin{cases} -\bar{z_0} \text{ est solution de (E)} \\ \bar{\bar{z_0}} = z_0 \text{ est solution de (E)} \end{cases} \end{cases}$$

Finalement l'équation admet 3 autres solutions qui sont $\bar{z_0}$, $-z_0$ et $-\bar{z_0}$.

Partie C

À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = z^2 + 4z + 3$.

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
Démontrer qu'il existe deux points invariants.
Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique.

$M(z)$ est invariant si $M' = M \iff z' = z \iff z^2 + 4z + 3 = z \iff z^2 + 3z + 3 = 0$.

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 3 = 9 - 12 = -3 = \left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2.$$

Cette équation a deux solutions : $z_1 = \dfrac{-3 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Il existe donc bien deux points invariants ayant pour affixe : $z_1 = \dfrac{-3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-3}{2} + i\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.

2. Soit A le point d'affixe $\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$.
Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

Calculons les distances OA, OB et AB

$OA^2 = x_A^2 + y_A^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$ donc $OA = \sqrt{3}$.

$OB^2 = x_B^2 + y_B^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$ donc $OB = \sqrt{3}$.

$AB = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3$ donc $AB = \sqrt{3}$.

$OA = OB = AB$; le triangle OAB est donc bien équilatéral.

3. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.

M' est sur l'axe des réels si $y' = 0$.

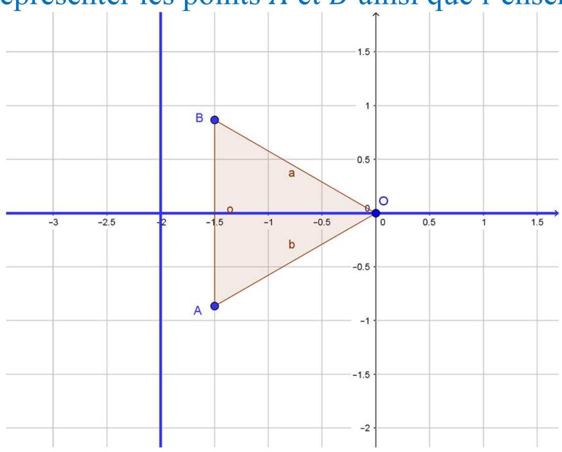
Or on sait que l'affixe du point M' est : $z' = z^2 + 4z + 3$

$$z^2 + 4z + 3 = (x + iy)^2 + 4(x + iy) + 3 = x^2 - y^2 + 2ixy + 4x + 4iy + 3 = x^2 - y^2 + 3 + i(2xy + 4y).$$

On a donc $y' = 0 \iff 2xy + 4y = 0 \iff 2y(x+2) = 0 \iff \left(x = -2 \ \ ou \ \ y = 0\right)$

Conclusion : l'ensemble (E) est constitué des points d'ordonnée nulle donc de l'axe des abscisses et des points de la droite verticale dont une équation est $x = -2$ (droites en bleu).

4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble (E).



Exercice 2 (3 points) Pondichéry Avril 2015 modifié

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation $u_{n+1} = au_n + b$ (a et b réels non nuls tels que $a \neq 1$).

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.

On a pour tout naturel n,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = au_n + b - \frac{b}{1-a} =$$

$$au_n + \frac{b(1-a)-b}{1-a} = au_n - a\frac{b}{1-a} = a\left[u_n - \frac{b}{1-a}\right] = av_n .$$

l'égalité $v_{n+1} = av_n$, vraie pour tout naturel n montre que la suite (v_n) est géométrique de raison a.

2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\frac{b}{1-a}$.

On sait que $v_n = v_0 \times a^n$; donc si $a \in]-1;1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) = 0 \text{ soit } \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{b}{1-a}.$$

3. On considère l'algorithme ci-contre obtenu avec Algobox.

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  Seuil EST_DU_TYPE NOMBRE
  U0 EST_DU_TYPE NOMBRE
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  Limite EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE U0
  LIRE Seuil
  U PREND_LA_VALEUR U0
  N PREND_LA_VALEUR 0
  Limite PREND_LA_VALEUR b/(1-a)
  SI (a>-1 ET a<1) ALORS
    DEBUT_SI
    TANT_QUE (abs(U-Limite)>Seuil) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      U PREND_LA_VALEUR a*U+b
      N PREND_LA_VALEUR N+1
      FIN_TANT_QUE
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      AFFICHER "Impossible car la suite diverge"
      FIN_SINON
  AFFICHER N
FIN_ALGORITHME
```

a. Qu'affiche cet algorithme lorsque $a = 2$, $b = 1$, $U0 = -1$ et $Seuil = 0{,}01$.

Comme a n'est pas compris entre 1 et -1, l'algorithme affiche « Impossible car la suite diverge ».

b. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Cet algorithme détermine le rang pour lequel $\left|u_n - \frac{b}{1-a}\right| \leq \varepsilon$ où ε est un réel entré par l'utilisateur et $u_{n+1} = au_n + b$ (a et b sont renseignés par l'utilisateur).

Exercice 3 (5 points) Centres étrangers (Maroc) – Juin 2010 (5 points) non modifié

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=6-\dfrac{5}{x+1}$.

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. **Étude de propriétés de la fonction f**

a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et $f'(x)=0-5\times\dfrac{-1}{(x+1)^2}=\dfrac{5}{(x+1)^2}>0$;

f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ l'équation $f(x)=x$. On note α la solution.

$$f(x)=x \Leftrightarrow 6-\frac{5}{x+1}=x \Leftrightarrow \frac{6(x+1)-5-x(x+1)}{x+1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}-x^2+5x+1=0\\ x\neq -1\end{cases};$$

$$-x^2+5x+1=0 : \Delta=29>0 \text{ donc 2 solutions dans } \mathbb{R} : \begin{cases}\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}\simeq 5{,}2\\[2mm] \dfrac{5-\sqrt{29}}{2}<0\end{cases};$$

Donc, dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$, l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution :

$\alpha=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}\simeq 5{,}2$.

c. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha[$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha[$.
De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$.

- Si x appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha]$:

Comme f est strictement croissante, si $0\leq x\leq\alpha$ alors $f(0)\leq f(x)\leq f(\alpha)$ $\Leftrightarrow$ $1\leq f(x)\leq\alpha$;

En conséquence, si $x\in[0\,;\alpha]$ alors $f(x)\in[0\,;\alpha]$; CQFD !

- Si x appartient à l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha;+\infty[$:

Comme f est strictement croissante, si $x\geq\alpha$ alors $f(x)\geq f(\alpha)$ $\Leftrightarrow$ $f(x)\geq\alpha$;

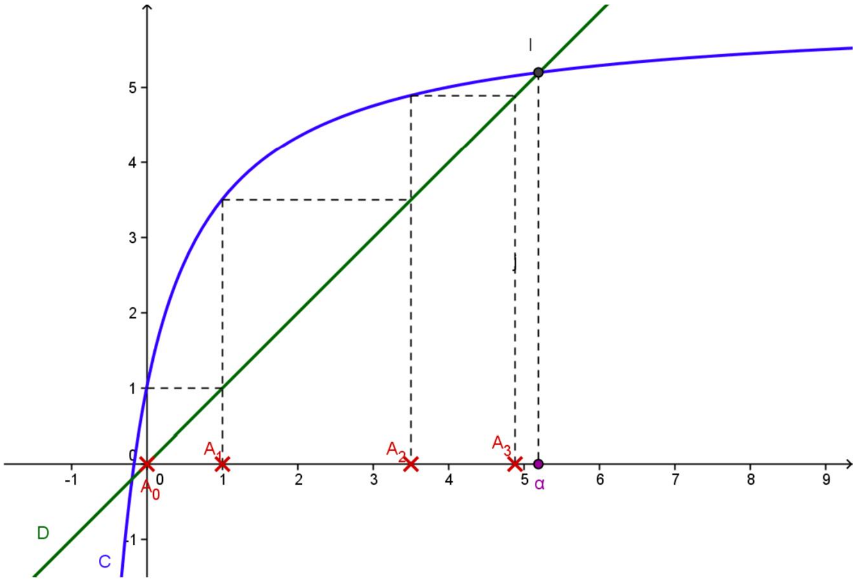
En conséquence, si $x\in[\alpha;+\infty[$ alors $f(x)\in[\alpha;+\infty[$; CQFD !

2. **Étude de la suite (u_n) pour $u_0=0$**

Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=f(u_n)=6-\frac{5}{u_n+1}.$$

a. Sur le graphique donné en **annexe**, sont représentées les courbes d'équations $y=x$ et $y=f(x)$.
Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0\,;0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?



Conjectures :

→ la suite (u_n) semble croissante ;

→ la suite (u_n) semble converger vers α.

b. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

Notons P_n la propriété : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ » avec $n \in \mathbb{N}$.

→ *Initialisation* : $u_0 = 0$ et $u_1 = f(u_0) = f(0) = 1$ donc on a $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$, soit P_0 vraie (1) ;

→ *Hérédité* : Supposons que P_n soit vraie ; alors il vient successivement :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha \text{ (H.R.)}$$

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha) \text{ (car } f \text{ croissante sur } [0 ; \alpha] \text{)}$$

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$$

Donc P_{n+1} vraie (si P_n vraie) (2)

De (1) et (2), il résulte que P_n vraie pour tout $n \geq 0$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

- Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée par α ; elle est donc convergente ;
- Appelons l sa limite ; Passons à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$;
  il vient, $l = f(l)$; Donc l est solution de l'équation $f(x) = x$ qui admet sur $[0 ; +\infty[$ α pour unique solution. Comme $0 \leq l \leq \alpha$, $l = \alpha$.

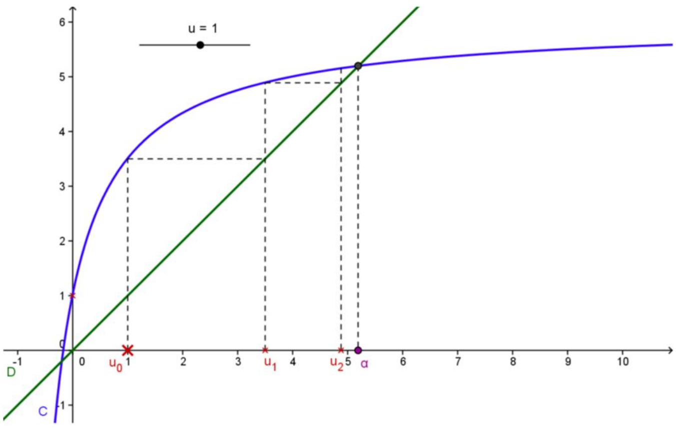
Ainsi, (u_n) converge vers α.

3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0

Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

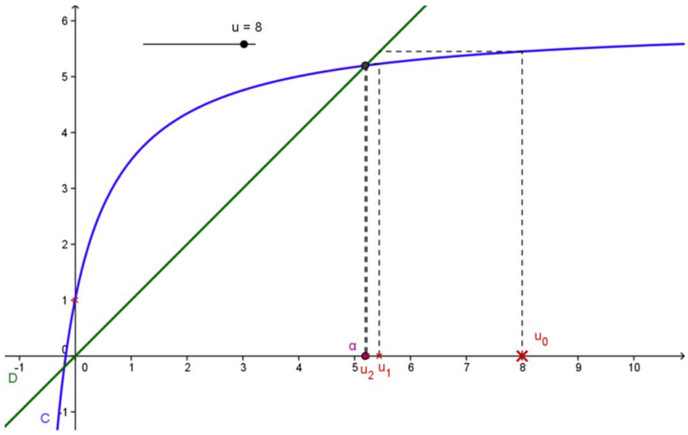
Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?

- $0 \leq u_0 < \alpha$: (u_n) croissante et converge vers α ;



- $u_0 = \alpha$: (u_n) constante à α (donc converge vers α) ;

- $u_0 > \alpha$: (u_n) décroissante et converge vers α.



Exercice de Spécialité (5 points)

Partie A

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

- **Proposition 1** : « Pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».
  $2^2 \equiv 1\ [3]$, d'où $(2^2)^n \equiv 1^n\ [3] \Leftrightarrow 2^{2n} \equiv 1\ [3] \Leftrightarrow 2^{2n} - 1 \equiv 0\ [3] \Leftrightarrow 2^{2n} - 1$ est un multiple de 3. Donc c'est **VRAI**.

- **Proposition 2 :** « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0\ [6]$, alors $x \equiv 0\ [3]$ ».
  Conte exemple : si $x = 2$, $x^2 + x = 6 \equiv 0\ [6]$ cependant 2 n'est pas un multiple de 3.
  C'est donc **FAUX**.

- Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture $\overline{abc}$ en base dix et N a pour écriture $\overline{bca}$ en base dix.
  Proposition 3 : « Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier M − N est aussi divisible par 27. »
  M peut s'écrire $M = 100a + 10b + c$ et $N = 100b + 10c + a$
  donc $M - N = 99a - 90b - 9c = 9(11a - 10b - c)$.

Supposons maintenant que M est divisible par 27 alors $M = 27k$ où $k\epsilon\mathbb{N}$.
On alors $100a + 10b + c = 27k$ ce qui peut s'écrire $100a - 27k = -10b - c$.
Comme $M - N = 9(11a - 10b - c)$
$= 9(11a + 100a - 27k) = 9(111a - 27k) = 27(37a - 9k)$ donc $M - N$ est divisible par 27.
L'affiramation est VRAIE.

Partie B
Démontrer que pour tout entier n , n^2 est congru soit à 0, soit à 1, soit à 4 modulo 8.
Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$ l'équation :$(n + 3)^2 - 1 \equiv 0\ [8]$.

- A l'aide d'un tableau de congruences modulo 8 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
n^2	0	1	4	1	0	1	4	1

Donc pour tout entier n , n^2 est congru soit à 0, soit à 1, soit à 4 modulo 8.

- $(n + 3)^2 - 1 \equiv 0\ [8] \iff (n + 3)^2 \equiv 1\ [8] \iff$
$(n + 3 \equiv 1\ [8]\ \ ou\ \ n + 3 \equiv 3\ [8]\ \ ou\ \ n + 3 \equiv 5\ [8]\ ou\ \ n + 3 \equiv 7\ [8]\ )$
C'est-à-dire $n \equiv 6\ [8]\ \ ou\ \ n \equiv 0\ [8]\ \ ou\ \ n \equiv 2\ [8]\ ou\ \ n \equiv 4\ [8]$

Partie C
Déterminer le reste dans la division euclidienne 10^{2011} par 7.
$10 \equiv 3\ [7]$ or $3^3 = 27 \equiv -1\ [7]$ donc $10^3 \equiv -1\ [7]$.
On a $2011 = 3 \times 670 + 1$ donc

$$10^{2011} = 10^{3\times 670+1} = (10^3)^{670}\times 10 \equiv (-1)^{670}\times 10\ \ [7] \equiv 10\ \ [7] \equiv 3\ \ [7].$$

Le reste dans la division euclidienne 10^{2011} par 7 est donc 3.

Exercice 4 (5 points) Polynésie Juin 2007 (5 points) modifié

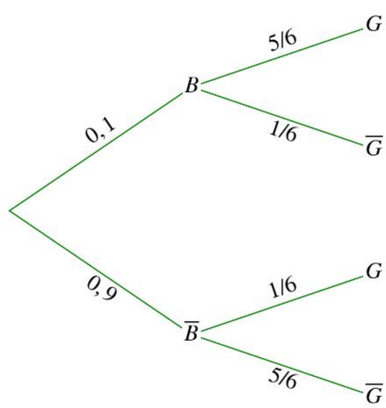
Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.
Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.
On note B l'événement « le jeton tiré est blanc » et G l'événement « le joueur gagne le jeu ». L'événement contraire d'un événement E est noté $\bar{E}$. La probabilité d'un événement est notée $p(E)$.

Partie A

1. Montrer que $p(\mathrm{G}) = \dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.



$$p(\mathrm{G}) = p(\mathrm{B})\times p(dé < 6) + p(\mathrm{N})\times p(dé = 6) = \frac{1}{10}\times\frac{5}{6} + \frac{9}{10}\times\frac{1}{6} = \frac{7}{30}$$

2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?

$$p_{\mathrm{P}}(\mathrm{B}) = \frac{p(\text{Blanc et Perdu})}{p(\mathrm{P})} = \frac{\frac{1}{10}\times\frac{1}{6}}{1-\frac{7}{30}} = \frac{1}{60}\times\frac{30}{23} = \frac{1}{46}$$

3. Un joueur fait huit parties de façon indépendante. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de parties gagnées.

a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X (justifier).

On répète huit fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est égale à $p(G) = \frac{7}{30}$ donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = \frac{7}{30}$.

La loi de probabilité de X est donnée par $p(X = k) = \binom{8}{k}\left(\frac{7}{30}\right)^k\left(\frac{23}{30}\right)^{8-k}$ avec $0 \leq k \leq 8$.

b. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement cinq et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

$$p(X = 5) = \binom{8}{5}\left(\frac{7}{30}\right)^5\left(\frac{23}{30}\right)^3 = 56\left(\frac{7}{30}\right)^5\left(\frac{23}{30}\right)^3 \approx 0{,}017$$

c. Calculer la probabilité qu'il en gagne au moins 4 et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

On cherche $p(X \geq 4)$.

$p(X \geq 4) = 1 - p(X < 4) = 1 - p(X \leq 3) \approx 1 - 0{,}908 = 0{,}092$.

La probabilité qu'il en gagne au moins 4 est d'environ 0,092.

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paye 1 euro par partie ;
- si le joueur gagne la partie il reçoit 5 euros ;
- si le joueur perd la partie il ne reçoit rien.

1. On note Y la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.

a. Donner la loi de probabilité de Y et son espérance mathématique.

Y peut prendre les valeurs -1 *et* 4.

$p(Y = -1) = \frac{23}{30}$ et $p(Y = 4) = \frac{7}{30}$.

$$E(Y) = -1 \times \frac{23}{30} + 4 \times \frac{7}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

b. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?

$E(Y) = \frac{1}{6} > 0$ donc le jeu est favorable au joueur mais pas à l'organisateur.

2. L'organisateur décide de modifier le nombre *n* de jetons noirs (*n* entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier *n* le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

Il faut recalculer $p(\mathrm{G}) = p(\mathrm{B}) \times p(dé < 6) + p(\mathrm{N}) \times p(dé = 6) = \frac{1}{n+1} \times \frac{5}{6} + \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{6} = \frac{5+n}{6(n+1)}$ d'où

$E(X) = -1 \times \left(1 - \frac{5+n}{6(n+1)}\right) + 4 \times \frac{5+n}{6(n+1)} = \frac{-(6n+6-5-n)+20+4n}{6(n+1)} = \frac{-n+19}{6(n+1)}$ qui sera positif lorsque $n \leq 19$.