Durée : 4 heures.

SPÉCIALITÉ

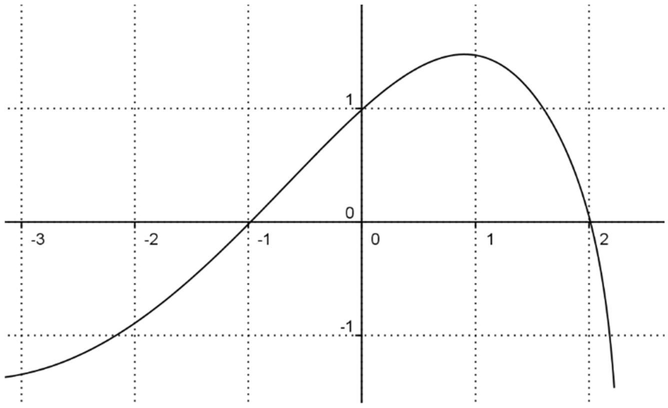
Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative C ci -dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; -1]$, $f'(x) \leq 0$.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; 2]$, $f(x) \geq -1$.
4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées (1 ; 0).

Exercice 2 (4 points)

Partie A - VRAI OU FAUX

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée (0,5 point par bonne réponse et 0 sinon).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \cos x$ et représentée par Cf dans un repère d'origine O.

1. f est 2π-périodique.
2. Cf est symétrique par rapport à O.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x f'(x) = x^2 \sin x$.
4. La tangente Cf en O a pour équation $y = x$.

Partie B - QCM

Pour chaque proposition, 4 réponses sont proposées : une seule est exacte.
Donner une seule réponse sans justification (0,5 point par bonne réponse et 0 sinon).

1. Le nombre complexe $(1 + i)^{72}$ est égal à :

a. 2^{72}	***b.*** $6{,}9 \times 10^{10}$	***c.*** 2^{36}	***d.*** 0

2. Le nombre complexe $\frac{1+i}{1-2i}$ est égal à :

a. $-\frac{1}{2}$	***b.*** $1 - 3i$	***c.*** $3 - i$	***d.*** $-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

3. La solution de l'équation $2iz + 1 = 2 - i$ est :

a. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$	***b.*** $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$	***c.*** $-\frac{1}{3}i$	***d.*** $-1 + i$

4. La solution de l'équation $z + 2i\bar{z} = 2 - 5i$ est :

a. 1	***b.*** $\frac{8}{3} - \frac{1}{3}i$	***c.*** $2 - \frac{5}{2}i$	***d.*** $-4 + 3i$

Exercice 3 (4 points) Cet exercice ne concerne que les élèves qui suivent la spécialité

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ avec a réel strictement positif et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le but est de déterminer M^{1000}de trois façons.

1. Méthode n°1
   a) Calculer M^2, M^3 et M^4.
   b) Conjecturer puis démontrer l'expression de M^n en fonction de n.
   En déduire M^{1000}.

2. Méthode n°2
   a) Vérifier que $M^2 = 2M - I$.
   b) En déduire M^3 et M^4 en fonction de M et I .
   c) Conclure.

3. Méthode n°3
   a) Déterminer la matrice A telle que $M = I + A$.
   b) Calculer A^2.
   c) En déduire M^2, M^3 et M^4 en fonction de A et I .
   d) Exprimer M^{1000} en fonction de A et I .
   e) Conclure.

Partie B

On donne la matrice carrée d'ordre 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. A l'aide de la calculatrice, donner A^2 , A^3 et A^4.
2. En déduire A^n (on ne demande pas de démontrer ce résultat).

Exercice 4 (8 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$.

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de la suite u par deux méthodes différentes.

I. Méthode n°1 – Utilisation d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$.

1. (a) Justifier que la fonction f est dérivable sur son ensemble de définition puis calculer $f'(x)$. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

(b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition puis interpréter graphiquement les résultats obtenus s'il y a lieu.

(c) Dresser le tableau de variation de f.

(d) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

2. On s'intéresse dans cette question aux propriétés de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};\ +\infty\right[$. On a représenté, en annexe, la courbe (C) représentative de f.

(a) Construire, sur le graphique, les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.
Quelles conjectures peut-on faire concernant le sens de variation de (u_n) et sa convergence ?

(b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

(c) En déduire que la suite u converge et calculer sa limite.

II. Méthode n°2 – Utilisation d'une suite auxiliaire.

On admet dans cette partie que la suite u est convergente.

Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

2. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

III. Etude d'un algorithme

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n - 1| < m$, où m désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et m sont deux réels u prend la valeur 0,5
Initialisation	n prend la valeur 0 Saisir la valeur de m
Traitement	Tant que ... ... Fin tant que
Sortie	Afficher n

1. Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

2. A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $m = 0{,}001$.

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Nom :…………………..

Prénom :………………..

Exercice 4