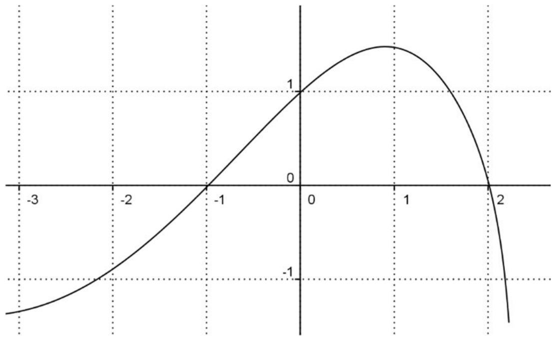
Exercice 1 (4 points)



Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3;2]$.

On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative C ci -dessous.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;-1]$, $f'(x) \leq 0$.

Sur l'intervalle $[-3\,;-1]$, la courbe C' est située en dessous de l'axe des abscisses et coupe celui-ci en -1, ce qui signifie que la fonction f' est négative ou nulle sur cet intervalle.

L'affirmation est donc **VRAIE**.

2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\,;2]$.

Pour connaître les variations de f sur $[-1;2]$, on a besoin de connaître le signe de f' sur $[-1;2]$ donné par la position de C' par rapport à l'axe des abscisses. Sur $[-1;2]$, C' est au-dessus de l'axe des abscisses donc f est croissante sur $[-1;2]$.

L'affirmation est **VRAIE**.

3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3;2]$, $f(x) \geq -1$.

On sait que f est croissante (continue car dérivable) sur $[-1;2]$ et que $f(0) = -1$ donc $f(x) < -1$ sur $[-1;0[$.

L'affirmation est **FAUSSE**.

4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées (1 ; 0).

La tangente à la courbe C au point d'abscisse 0 admet pour équation : $y = f'(0)\times(x-0)+f(0)$ or $f'(0)=1$ (lecture graphique) et $f(0)=-1$ donc l'équation devient $y = x-1$.

Les coordonnées (1 ; 0) vérifient l'équation donc le point appartient à la tangente.

L'affirmation est **VRAIE**.

Remarque : On peut aussi regrouper toutes les informations dans le tableau suivant afin de justifier chacune des affirmations.

x	-3		-1		0		2
f '(x)		$-$	0	$+$			
f(x)		↘		↗	-1	↗	

Exercice 2 (4 points)

Partie A - VRAI OU FAUX

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée (0,5 point par bonne réponse et 0 sinon).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cos x$ et représentée par Cf dans un repère d'origine O.

1. f est 2π-périodique.

f est 2π-périodique si et seulement si, pour tout réel x ,$f(x+2\pi) = f(x)$
$f(0+2\pi) = (0+2\pi)\cos(0+2\pi) = 2\pi\times 1 = 2\pi$ or $f(0) = 0$.
$f(0+2\pi) \neq f(0)$ donc f n'est pas 2π-périodique.

L'affirmation est **FAUSSE**.

2. Cf est symétrique par rapport à O.

Cf est symétrique par rapport à O si f est impaire donc si, pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$.
$f(-x) = (-x)\cos(-x) = -x\cos x = -f(x)$
f est donc impaire.

L'affirmation est **VRAIE**.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x f'(x) = x^2 \sin x$.

$f'(x) = 1\times\cos x + x\times(-\sin x) = \cos x - x\sin x$ donc
$f(x) - x f'(x) = x\cos x - x(\cos x - x\sin x) = x^2 \sin x$

L'affirmation est **VRAIE**.

4. La tangente à Cf en O a pour équation $y = x$.

La tangente T à Cf en O a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ or $f'(0) = \cos 0 - 0\sin 0 = 1$ et $f(0) = 0$ donc T : $y = x$.

L'affirmation est **VRAIE**.

Partie B - QCM

Pour chaque proposition, 4 réponses sont proposées : une seule est exacte.
Donner une seule réponse sans justification (0,5 point par bonne réponse et 0 sinon).

1. Le nombre complexe $(1+i)^{72}$ est égal à :

~~*a.* 2^{72}~~	~~*b.* $6{,}9\times 10^{10}$~~	**c.** 2^{36}	~~*d.* 0~~

$(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$ donc $(1+i)^{72} = ((1+i)^2)^{36} = (2i)^{36} = 2^{36}\times i^{36} = 2^{36}\times(i^4)^9 = 2^{36}$

2. Le nombre complexe $\frac{1+i}{1-2i}$ est égal à :

~~*a.* $-\frac{1}{2}$~~	~~*b.* $1-3i$~~	~~*c.* $3-i$~~	**d.** $-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$

À l'aide de la calculatrice (par exemple):

```
(1+i)/(1-2i)
          -.2+.6i
Rép▸Frac
          -1/5+3/5i
```

3. La solution de l'équation $2iz + 1 = 2 - i$ est :

a. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$	~~*b.* $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$~~	~~*c.* $-\frac{1}{3}i$~~	~~*d.* $-1+i$~~

$$2iz + 1 = 2 - i \iff 2iz = 1 - i \iff z = \frac{1-i}{2i} = \frac{-i-1}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

4. La solution de l'équation $z + 2i\bar{z} = 2 - 5i$ est :

a. ~~1~~	*b.* ~~$\frac{8}{3} - \frac{1}{3}i$~~	*c.* ~~$2 - \frac{5}{2}i$~~	***d.*** $-4 + 3i$

Posons $z = a + ib$:

$$z + 2i\bar{z} = 2 - 5i \Leftrightarrow a + ib + 2i(a - ib) = 2 - 5i \Leftrightarrow a + 2b + i(2a + b) = 2 - 5i$$

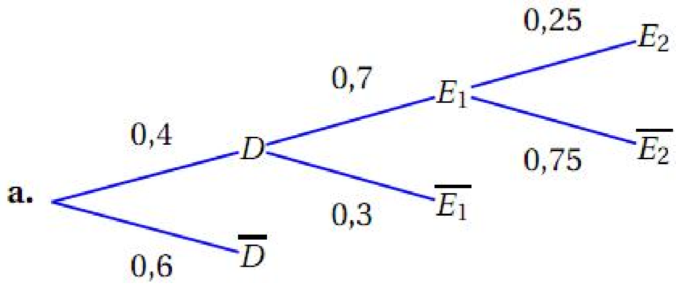
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 2 \\ 2a + b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 2 \\ -4a - 2b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = 12 \\ a + 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases}$$

Exercice 3 (4 points) Cet exercice ne concerne pas les élèves qui suivent la spécialité

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante : le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier ; 40 %des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.
On considère les évènements suivants :
– D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
– E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
– E_2 : « Le candidat est recruté ».

a. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. Calculer la probabilité de l'évènement E_1.

Sur l'arbre ci-dessus, un seul chemin conduit à E_1, celui passant par D donc

$$\boxed{p(E_1) = p(E_1 \cap D) = p(D) \times p_D(E_1) = 0,4 \times 0,7 = 0,28}$$

c. On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».
Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à 0,93.

Trois situations peuvent se produire :

$p(F) = p\left(\bar{D} \cup \left(D \cap \overline{E_1}\right) \cup \left(D \cap E_1 \cap \overline{E_2}\right)\right) = p(\bar{D}) + p\left(D \cap \overline{E_1}\right) + p\left(D \cap E_1 \cap \overline{E_2}\right)$ car les évènements sont incompatibles.

Finalement $p(F) = 0,6 + 0,4 \times 0,3 + 0,4 \times 0,7 \times 0,75 = 0,93$.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres.
On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07.
On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

On répète 5 fois de suite de manières indépendantes une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles dont la probabilité du succès vaut 0,07 donc X suit une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,07$.

b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

On sait que pour $0 \le k \le 5$, $p(X=k)=\binom{5}{k}(0,07)^k \times (0,93)^{5-k}$ donc pour $k=2$,

$p(X=2)=\binom{5}{2}(0,07)^2 \times (0,93)^3 = \boxed{0,039 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

3. On cherche le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999.

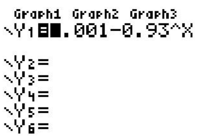
a. Montrer que ce problème équivaut à résoudre l'inéquation $0,001-0,93^n>0$ où *n* est un entier naturel.

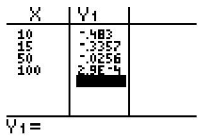
On sait que $p(X \ge 1)=1-p(X=0)=1-\binom{n}{0}0,07^0 \times 0,93^n=1-0,93^n$.

On cherche donc n tel que $p(X \ge 1)>0,999$ c'est-à-dire $1-0,93^n>0,999$ ou encore $0,001-0,93^n>0$.

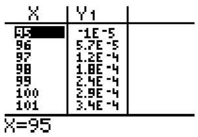
b. Proposer une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de *n*.

Par tâtonnement, à l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice :





Nous constatons que la valaur cherchée est proche de 100.



D'après la calculatrice, c'est à partir de 96 que $0,001-0,93^n>0$.

Exercice 4 (8 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$.
Le but de cet exercice est de déterminer la limite de la suite u par deux méthodes différentes.

I. Méthode n°1 – Utilisation d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$.

1. (a) Justifier que la fonction f est dérivable sur son ensemble de définition puis calculer $f'(x)$.
En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Les fonctions $x \mapsto 3x$ et $x \mapsto 1 + 2x$ sont des fonctions polynômes ; elles sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ en tant que quotient défini sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ de fonctions dérivables.
$f'(x) = \frac{3\times(1+2x)-3x\times(2)}{(1+2x)^2} = \frac{3}{(1+2x)^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

(b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition puis interpréter graphiquement les résultats obtenus s'il y a lieu.

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{2x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$, on peut en déduire que la droite d'équation $y = 1{,}5$ est asymptote horizontale à (C) en + et $-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-0{,}5} 3x = 1{,}5$ et $\lim\limits_{x\to-0{,}5^+}(1 + 2x) = 0^+$donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-0{,}5^+} f(x) = +\infty$.
  De la même façon, $\lim\limits_{x\to-0{,}5^-} f(x) = -\infty$.
  On peut en déduire que la droite d'équation $x = -0{,}5$ est asymptote verticale à (C) à l'infini.

(c) Dresser le tableau de variation de f.

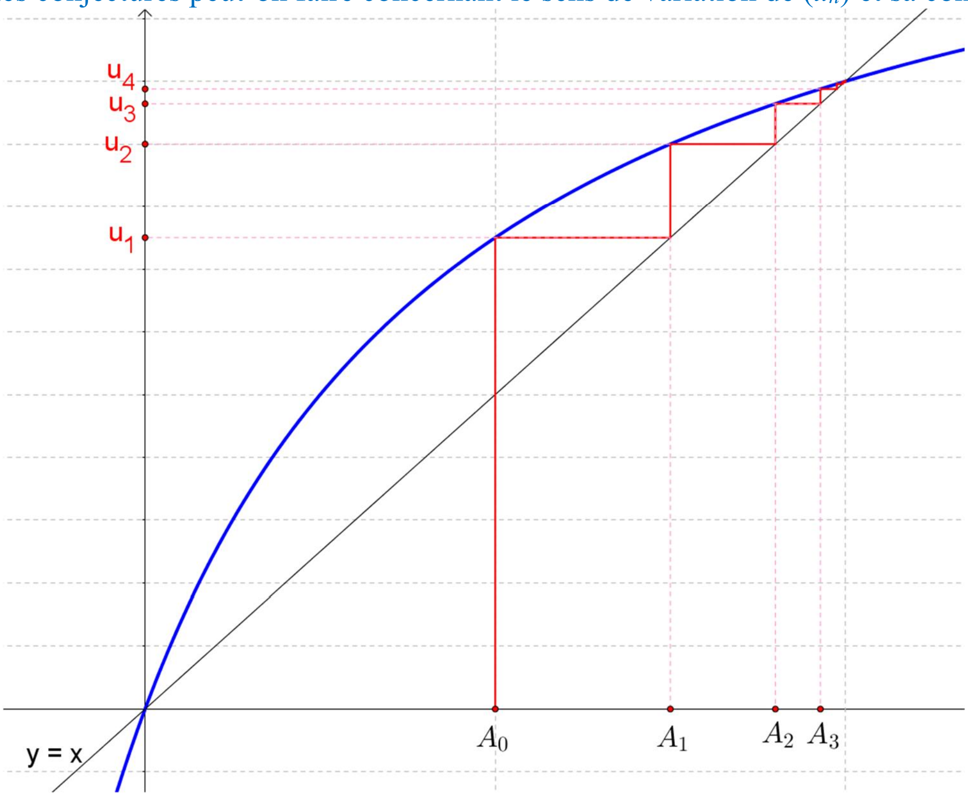
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

(d) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

Sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $f(x) = x \iff \frac{3x}{1+2x} = x \iff 3x = x(1 + 2x) \iff 2x^2 - 2x = 0 \iff 2x(x - 1) = 0$.
Les solutions sont donc 0 et 1.

2. On s'intéresse dans cette question aux propriétés de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$. On a représenté, en annexe, la courbe (C) représentative de f.

(a) Construire, sur le graphique, les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.
Quelles conjectures peut-on faire concernant le sens de variation de (u_n) et sa convergence ?



La suite semble croissante et converger vers 1.

(b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Initialisation :

$u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = f(u_0) = \frac{3}{4}$ donc on a bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$.

Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie jusqu'à un certain rang n.
On a alors $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
On sait que la fonction f est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$, elle l'est donc sur $[0 ; 1]$ et ainsi :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1 \implies f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1) \implies 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$$

Car nous avons démontré au 1)d. que 1 est solution de l'équation $f(x) = x$.

Conclusion : pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

(c) En déduire que la suite u converge et calculer sa limite.

On vient de démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$ ce qui signifie que la suite est croissante.
De plus elle est majorée par 1, or toute suite croissante majorée converge.
La suite (u_n) converge donc vers une limite L comprise entre 0 et 1 qui est telle que $L = f(L)$.
L'équation $f(x) = x$ admet deux solutions : 0 et 1 or (u_n) est croissante et $u_0 = \frac{1}{2}$ donc $u_n \geq \frac{1}{2}$ ce qui exclu 0. Ainsi $L = 1$.

II. Méthode n°2 – Utilisation d'une suite auxiliaire.

On admet dans cette partie que la suite u est convergente.

Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\frac{3u_n}{1+2u_n}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1+2u_n-3u_n}{1+2u_n}} = \frac{3u_n}{1-u_n} = 3v_n$$

Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 3v_n$, la suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 3.

2. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 q^n = 3^n$.

3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.

Pour tout entier naturel n,

$v_n = \frac{u_n}{1-u_n} \Leftrightarrow (1-u_n)v_n = u_n \Leftrightarrow v_n = u_n + u_n v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{1+v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Comme $3 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$. L'étude du quotient conduit donc à une forme indéterminée.

$$u_n = \frac{3^n}{3^n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

Par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1$, enfin, par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

La suite (u_n) converge vers 1.

III. Etude d'un algorithme

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $\cancel{u_n - 1 < m}$, où m désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et m sont deux réels u prend la valeur 0,5
Initialisation	n prend la valeur 0 Saisir la valeur de m
Traitement	Tant que $1-u > m$ u prend la valeur $3u/(1+2u)$ n prend la valeur $n+1$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

1. Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

2. A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $m = 0{,}001$.

On trouve $n = 7$

Exercice 3 (4 points) ***Cet exercice ne concerne que les élèves qui suivent la spécialité***

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ avec a réel strictement positif et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le but est de déterminer M^{1000}de trois façons.

1. Méthode n°1

   a) Calculer M^2, M^3 et M^4.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3a & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^3 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3a & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4a & 1 \end{pmatrix}$$

   b) Conjecturer puis démontrer l'expression de M^n en fonction de n.
   En déduire M^{1000}.

Il semblerait que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$. Montrons ce résultat par récurrence.

Initialisation : effectuée à la question a)

Hérédité : On suppose que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$ jusqu'à un certain rang n .

$$M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n+1)a & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : pour tout entier naturel non nul, $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$.

On peut en déduire que $M^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1000a & 1 \end{pmatrix}$.

2. Méthode n°2

   a) Vérifier que $M^2 = 2M - I$.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2a & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2M - I$$

   b) En déduire M^3 et M^4 en fonction de M et I .

$$M^3 = M^2 \times M = (2M - I) \times M = 2M^2 - IM = 2(2M - I) - M = 3M - 2I$$

$$M^4 = M^3 \times M = (3M - 2I) \times M = 3M^2 - 2IM = 3(2M - I) - 2M = 4M - 3I$$

   c) Conclure.
   On peut donc penser que $M^n = nM - (n-1)I$. Montrons ce résultat par récurrence pour $n \geq 2$.

Initialisation : effectuée à la question a)

Hérédité : On suppose que $M^n = nM - (n-1)I$ jusqu'à un certain rang n .

$M^{n+1} = M^n \times M = (nM - (n-1)I)M = nM^2 - (n-1)IM = n(2M - I) - (n-1)M = (n+1)M - nI$

Conclusion : pour tout entier naturel non nul, $M^n = nM - (n-1)I$.

On peut en déduire que $M^{1000} = 1000M - 999I$.

3. <u>Méthode n°3</u>

a) Déterminer la matrice A telle que $M = I + A$.

$M = I + A \Leftrightarrow M - I = A$ donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

b) Calculer A^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) En déduire M^2, M^3 et M^4 en fonction de A et I .

$$M^2 = (I + A)^2 = I^2 + 2IA + A^2 = I + 2A + A^2 = I + 2A$$

$$M^3 = (I + A)^2 \times (I + A) = (I + 2A)(I + A) = I^2 + 3A + 2A^2 = I + 3A$$

$$M^4 = (I + A)^3 \times (I + A) = (I + 3A)(I + A) = I^2 + 4A + 3A^2 = I + 4A$$

d) Exprimer M^{1000} en fonction de A et I .

On peut en déduire que $M^{1000} = I + 1000A$

e) Conclure.

$$M^{1000} = I + 1000A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1000a & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Partie B</u>

On donne la matrice carrée d'ordre 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. A l'aide de la calculatrice, donner A^2 , A^3 et A^4.

```
[A]²
        [[1 0 0]
         [0 1 0]
         [0 0 1]]
```

```
[A]^3
     [[1  -4  -4]
      [-1  1   2 ]
      [1  -2  -3]]
```

```
[A]^4
          [[1 0 0]
           [0 1 0]
           [0 0 1]]
```

2. En déduire A^n (on ne demande pas de démontrer ce résultat).

D'après les résultats précédents :

- si n est pair alors $n = 2k$ et $A^{2k} = I$
- si n est impair alors $n = 2k + 1$ et $A^{2k+1} = A$