Terminale S3	Evaluation de mathématiques n°2 Durée 55 mn	31 octobre 2016

Exercice 1 (4,5 points) Compléter le tableau suivant

Interprétation mathématique	Interprétation graphique
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$	La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à Cf en $+\infty$.
$\lim\limits_{x\to1} f(x) = \infty$	la droite d'équation : $x = 1$ est asymptote à Cf
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$	la droite d'équation : $y = -1$ est asymptote à Cf en $-\infty$
$\lim\limits_{\substack{x\to3 \\ x<3}} f(x) = -\infty$	La droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à Cf en $-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - (x-3)\right] = 0$	La droite d'équation $y = x - 3$ est asymptote oblique à Cf en $+\infty$.
$f(x) - (-x+2) < 0$ *sur* $[1\,;6]$	Cf est située sous la droite d'équation : $y = -x + 2$ pour $x \in [1;6]$
Etudier le signe de : $f(x) - (x+1)$	Etudier la position relative de Cf par rapport à la droite d'équation $y = x + 1$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - (x-1)\right) = 0$	La droite d'équation : $y = x - 1$ est asymptote à Cf en $+\infty$
Etudier le signe de $f(x) - g(x)$	Etudier la position de Cf par rapport à Cg

Exercice 2 (3points) Compléter les phrases suivantes

- Quand $f(x)$ tend vers $+\infty$ et $g(x)$ tend vers 0^-, alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $-\infty$
- Quand $f(x)$ tend vers -3 et $g(x)$ tend vers 0^-, alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $+\infty$
- Quand $f(x)$ tend vers 1 et $g(x)$ tend vers $-\infty$, alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0^-
- Quand $f(x)$ tend vers $+\infty$ et $g(x)$ tend vers $-\infty$, alors $f(x) \times g(x)$ tend vers $-\infty$
- Quand $f(x)$ tend vers 0 et $g(x)$ tend vers $+\infty$, alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0^+ ou 0^-.
- Les formes indéterminées sont : "$\infty - \infty$" ; "$\frac{\infty}{\infty}$" ; "$\frac{0}{0}$" ; "$0 \times \infty$"

Exercice 3 (4,5 points) Calculer les limites suivantes en justifiant soigneusement

- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(12+\dfrac{3}{x-2}\right)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} 3 = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(x-2) = 0^-$ donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{3}{x-2} = -\infty$.

Finalement, par somme, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(12+\frac{3}{x-2}) = -\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-x+3) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+5}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

Exercice 4 (8 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{0\}$ par $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+2}{3x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. *a.* Montrer que, pour tout réel $x\neq 0$, $f'(x) = \frac{2(x^2-1)}{3x^2}$

$$f'(x) = \frac{(4x-5)\times(3x)-(2x^2-5x+2)\times 3}{(3x)^2} = \frac{12x^2-15x-6x^2+15x-6}{9x^2} = \frac{6x^2-6}{9x^2} = \frac{2(x^2-1)}{3x^2}$$

b. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
La courbe (C) admet-elle une asymptote horizontale ? verticale ? Expliquez.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{3x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{3} = -\infty$.

De là même façon, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. La courbe (C) n'admet pas de tangente horizontale car les deux résultats ne sont pas finis.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(2x^2-5x+2) = 2$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 3x = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

On a, de la même façon, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$. Ces deux résultats prouvent que la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptotes verticale à (C) en + et - ∞.

c. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

Sur $\mathbb{R}-\{0\}$, le signe de f' est celui de x^2-1 or $x^2-1 = (x-1)(x+1)$, on peut alors dresser le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3x^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)=\frac{2(x^2-1)}{3x^2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On peut ensuite en déduire le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$			-3		$\Vert\ +\infty$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$-\infty\ \Vert$		$-\frac{1}{3}$		

2. ***a.*** Montrer que, pour tout x non nul, $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{3x}$,

où a , b et c sont trois réels que l'on déterminera.

$ax+b+\dfrac{c}{3x}=\dfrac{3ax^2+3bx+c}{3x}$, d'où :

pour $x\neq 0$, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{3x} \Leftrightarrow \begin{cases}3a=2\\3b=-5\\c=2\end{cases}$. On a donc : $\boxed{f(x)=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3}+\dfrac{2}{3x}}$

b. En déduire que la droite (D) d'équation $y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3}$ est asymptote à la courbe (C).

$f(x)-\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{2}{3x}$ or $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{3x}=0$; donc la **droite d'équation** $y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3}$ **est <u>asymptote</u>** oblique à la courbe (C).

c. Etudier la position de la courbe (C) par rapport (D).

Il faut étudier le signe de $f(x)-\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{2}{3x}$. Or $\frac{2}{3x}>0\ si\ x>0$ et $\frac{2}{3x}<0\ si\ x<0$.

On peut donc en déduire que :

- (C) est au-dessus de (D) sur $]0\ ;\ +\infty[$
- (C) est en dessous de (D) sur $]-\infty\ ;0[$.

3. Existe-t-il des tangentes à la courbe (C) parallèles à son asymptote oblique ?

Il existe des tangentes à la courbe parallèles à son asymptote oblique si les deux droites ont même coefficient directeur, c'est-à-dire s'il existe x tel que $f'(x)=\dfrac{2}{3}$.

$$f'(x)=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2x^2-2}{3x^2}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 2x^2-2=\frac{2}{3}\times 3\ x^2 \Leftrightarrow \cancel{-2=0}$$

L'équation $f'(x)=\dfrac{2}{3}$ est impossible donc **il n'existe pas de tangentes à la courbe parallèles à son asymptote oblique**.