I. Forme algébrique et représentation d'un nombre complexe

1. Définition et vocabulaire

Théorème

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ appelé **ensemble ………………………** qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des ……………… ;
- il contient un nombre tel que **……………..**;
- il est muni d'une **………………et ………………………** qui ont les **mêmes propriétés que dans** $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.

Exemples

- Les nombres -1 ; 0 ; $\frac{3}{4}$; $\sqrt{2}$ sont des nombres réels donc ce sont aussi ……….. ……….
- À l'aide du nombre i et de la multiplication : … … … … … … … . . … …. sont aussi dans $\mathbb{C}$.
- Avec les additions, les nombres suivants sont aussi dans $\mathbb{C}$: … … … … … … … …

Définition

Tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme : … … … … … … … avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Cette écriture est appelée **………………………..** de z :

- a est appelée **…………………..** de z, notée … … … ….
- b est appelée **…………………..** de z, notée … … … ….

Remarques

- Lorsque $\operatorname{Im}(z) = 0$, $z =$ …. est ………
- Lorsque $\operatorname{Re}(z) = 0$, $z =$ … est appelé **………………..**

Méthode 1 - Réduire un complexe à sa forme algébrique exo-forme-algebrique

Exercice d'application

Soient $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$, $z_2 = -1 + i$, des nombres complexes.

Déterminer les parties réelles et imaginaires des complexes : $z_3 = z_1 \times z_2$, $z_4 = z_1^2$.

Théorème

Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux nombres complexes :

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots.. & = & \ldots.. \\ \ldots\ldots & = & \ldots\ldots \end{cases}$$

L' écriture algébrique d'un nombre complexe est **…………………**

Démonstration

……..

Exemple

Soit $z = 2x - 1 + i(3 - y)$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, un complexe.

On a $z = 0$ si et seulement si … ..

2. Représentation graphique des complexes

Le plan est muni d'un repère **orthonormé direct** : $\left(O\,;\overrightarrow{OU}\,,\overrightarrow{OV}\right) = (O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$.

Définition

Tout nombre complexe $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ peut être représenté dans ce repère par :

- un unique point : $M\ (a\ ;\ b)$, appelé **..............................** de $z = a + ib$.
- un unique vecteur : $\overrightarrow{OM}\ (a\,;b)$ appelé **............................** de $z = a + ib$.

On dit que $z = a + ib$ est …………………. du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

On note souvent M **….** ou M … … … … et $\overrightarrow{OM}$ … … **..** ou $\overrightarrow{OM}$ … … … … … **..**

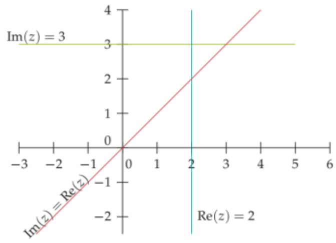
Remarques

- Les complexes $\boldsymbol{z = a} \in \mathbb{R}$ sont les nombres réels et sont représentés sur **……………………..**
- Les complexes $\boldsymbol{z = ib}$, $b \in \mathbb{R}$ sont les **imaginaires purs** et sont représentés sur **…………… …………………………**
- Le plan est alors appelé **…………………………**.

Exemple

Dans le plan complexe, on a représenté ci-contre les points d'affixe z tels que

- $\mathcal{Re}(z) =$ … … … **….**
- $\mathcal{Im}(z) =$ … … …
- $\mathcal{Re}(z) =$ … … **….**



II. Addition, multiplication par un réel et géométrie

On se place dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$.

1. Addition

Théorème

- Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ alors $z_1 + z_2 =$ … … … … … … … … … … …
- Si z_1 est l'affixe de $\overrightarrow{w_1}$ et z_2 celle de $\overrightarrow{w_2}$ alors $z_1 + z_2$ est l'affixe de … … … … … … … **..**

Démonstration

……

Remarque

Dans la pratique, on se passe aisément de la formule en calculant avec les règles habituelles puisque :
$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$.

2. Opposé d'un nombre complexe

Théorème

- L'opposé du nombre complexe $z = a + ib$ est : $-z =$ … … … … … … … … … … … … … **..**
- z est l'affixe du point M. **L'opposé** de z noté $-z$ est l'affixe du **…………………..** de M par rapport à **…………………………**.
- si z est l'affixe de $\vec{w}$ alors $-z$ est l'affixe de … … … …

Démonstration

…….

3. Soustraction

Théorème

- Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ alors $z_1 - z_2 =$ … … … … … … … … … … … … … ….
- Si $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont d'affixes respectives z_1 et z_2 alors $\overrightarrow{w_1} - \overrightarrow{w_2}$ est d'affixe… … … … … … ..
- Si A et B sont d'affixes z_A et z_B alors $z_B - z_A$ est l'affixe de … … … … ….

Démonstration

Elle résulte des définitions et des formules des coordonnées de vecteurs dans les repères.

Méthode 2 – Utiliser les nombres compexes en géométrie

La méthode générale consiste à :

1. Transformer les données géométriques du texte ou les questions en terme de vecteurs puis de nombres complexes.
2. Utiliser les règles de calcul pour résoudre le problème.

Exercice d'application

On considère trois points A, B, C d'affixes :

$$A = -3 + 2i\,,\; B = 1 + i \text{ et } C = 3 - 4i.$$

1. Déterminer l'affixe du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Déterminer les coordonnées du centre de ce parallélogramme.

4. Multiplication d'un complexe par un réel

Théorème

Soit $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{w}$ d'affixe z. Le complexe λz est l'affixe du vecteur … … … …..

Exemple

Soit A, B deux points du plan d'affixe $z_A = 3 - i$ et $z_B = -2 + 3i$.

Le vecteur $2\overrightarrow{AB}$ a pour affixe : … ..

III. Inverse et quotient de nombres complexes

1. Conjugué d'un nombre complexe

Définition

- Le **conjugué d'un nombre complexe** $z = a + ib$ est le complexe … … … … … …, noté … … …
- Si z est l'affixe de M, $\bar{z}$ est l'affixe …………………………………………………………..

Démonstration

……

Théorème

1. $z + \bar{z} =$ … … … … ; $z - \bar{z} =$ … … … … … … ..
2. z est réel si et seulement si … … … … … … ..
3. z est imaginaire pur si et seulement si … … … … … … …..

Démonstration

2. Inverse d'un nombre complexe

Théorème

Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un nombre complexe z' tel que $zz' = 1$.

Ce nombre s'appelle l'inverse de z, noté $\frac{1}{z}$ et il est tel que : $\frac{1}{z} =$ … … … … ..

Si $z = a + ib \neq 0$ alors la forme algébrique de $\frac{1}{z}$ est : $\frac{1}{z} =$ … … … … … … … ..

Démonstration

……..

Exemple

Dans la pratique, on effectue une multiplication par le conjugué du dénominateur pour se ramener à un dénominateur réel.

1. $z = 2\mathrm{i}$. On a $\frac{1}{z} =$ … … … … … … … … … … … ..
2. $z = \frac{1}{2+3\mathrm{i}} =$ … … … … … … … … … … … … ..

3. Quotient d'un nombre complexe

Définition

Soient z_1 et $z_2 \neq 0$ deux nombres complexes. On définit leur quotient par : $\frac{z_1}{z_2} =$ … … … … … … … ….

Méthode 3 – Calculer et utiliser le quotient des nombres complexes

Exercice d'application

Résoudre l'équation : $(1 + i)z - 2 = 3 + 2\mathrm{i}$.

4. Opérations avec les conjugués des nombres complexes

Théorème

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.

1) $\overline{\overline{z_1}} =$ … … … ….

4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} =$ … … … … … … …

2) $\overline{z_1 + z_2} =$ … … … …

5) $\overline{z_1^n} =$ … … … … … … … … …

3) $\overline{z_1 \times z_2} =$ … … … … …

Démonstration

……

Exemple

Démontrons que $S = (1 + \mathrm{i})^5 + (1 - i)^5$ est un nombre réel.

IV. Équations du second degré

Théorème

Pour tout nombre réel non nul a, l'équation $z^2 = a$ admet deux racines dans :

- Si $a > 0$, les racines sont $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$.
- Si $a < 0$, les racines sont $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Exemples

Les solutions de : $z^2 = 16$ sont $\dots\dots\dots\dots\dots$

Les solutions de $z^2 = -5$ dans $\mathbb{C}$ sont $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$. (alors que cette équation n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$)

Théorème

Soit $az^2 + bz + c = 0,\ a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

$\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation.

- Si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution dans $\mathbb{R}$: $z_0 = \dots\dots\dots\dots\dots$
- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$: $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
- $\Delta < 0$, l'équation a deux solution dans $\mathbb{R}$ qui sont conjuguées :………………………………………

Démonstration

……………

Remarque

- Toute expression $Q(z) = az^2 + bz + c,\ a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$, se factorise dans $\mathbb{C}$ et :
$$Q(z) = az^2 + bz + c = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
- $Q(z) = az^2 + bz + c = a(z^2 + \ \dots z + \ \dots) = a(z^2 - Sz + P)$ avec :
$$S = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{ et } P = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Méthode 4 - Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Exercice d'application

Résoudre l'équation : $z^2 - 2z = -3$.