Fonctions et algorithmes

1

Définitions

Fonctions

- Lorsqu'à tout nombre x d'une partie D de $\mathbb{R}$ on associe un nombre réel y et un seul, alors on définit une **fonction** sur l'ensemble D.
  – D est l'**ensemble de définition** de la fonction f.
  – On note : $f : D \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto y$

x est une **variable**.
x peut prendre pour valeur n'importe quel nombre de l'ensemble de définition D.

$y = f(x)$ est l'**image** de x par f.
Tout nombre de l'ensemble D a une image unique par la fonction f.

Algorithmes

- Un algorithme est la description d'un ensemble d'« opérations » exécutées dans un ordre précis.
- On commence toujours par la **déclaration des variables** (on nomme toutes les variables utilisées et on précise leur type : nombre ou chaîne de caractères).
- L'algorithme commence par un début et se termine par une fin. Il contient un nombre fini d'**instructions** : affectation, entrée, calcul, test, boucle, sortie, etc.
- On parle d'**entrée** lorsque l'on demande à l'utilisateur du programme de saisir, par exemple, la valeur d'une variable ; on parle de **sortie** lorsque le programme affiche, par exemple, le résultat.

Remarque : on peut définir une fonction par un algorithme, mais un algorithme ne définit pas toujours une fonction.

Maîtriser les définitions

1 Justifier pourquoi chaque phrase définit ou non une fonction.
Lorsqu'il s'agit d'une fonction, indiquer l'ensemble de définition D et, lorsque cela est possible, une expression algébrique qui définit l'image par la fonction de tout nombre réel x de D.

a. « À tout nombre réel, on associe son double. »

Cette phrase caractérise une fonction, car tout nombre réel a un seul double.

$D = \mathbb{R}$ Pour tout réel x, $f(x) = 2x$

b. « À tout nombre réel non nul, on associe son inverse. »

Cette phrase définit une fonction, car tout nombre réel non nul possède un seul inverse.

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Pour tout réel x non nul, $g(x) = \frac{1}{x}$

c. « À tout nombre entier positif, on associe un nombre dont il est le carré ».

Cette phrase ne définit pas une fonction, car, par exemple, 9 a deux images : -3 et 3.

d. « À tout nombre entier naturel, on associe la somme de ses chiffres. »

Cette phrase définit une fonction, car le résultat de la somme de ses chiffres est unique.

$D = \mathbb{N}$ Pas définie par une expression algébrique.

2 Pour chaque programme de calcul, choisir, parmi les expressions proposées, celle de l'image du nombre x par la fonction f.
a. Ajouter 7 à un nombre ; élever au carré ; prendre l'opposé.
b. Élever au carré un nombre ; prendre l'opposé ; ajouter 7.
c. Ajouter 7 à l'opposé d'un nombre ; élever au carré.

Expression	Programme
$f(x) = -x^2 + 7$	b
$f(x) = (-x + 7)^2$	c
$f(x) = -(x + 7)^2$	a

Appliquer — Algo

3 **1.** Dans l'algorithme suivant, encadrer la phrase indiquant une entrée, puis celle indiquant une sortie.

Variables
A, B et C sont des nombres réels.
Début
Saisir la valeur de A.
B prend la valeur $3 \times A + 2$.
C prend la valeur B^2.
Afficher la valeur de C.
Fin

2. Soit f la fonction définie par cet algorithme.
Donner son ensemble de définition et l'expression de l'image par f d'un nombre x quelconque.

$D = \mathbb{R}$ ..... Pour tout réel x, $f(x) = (3x + 2)^2$ .....

4 On considère l'algorithme suivant :

Variables
A, B, N sont des entiers naturels.
Début
Saisir A.
N prend une valeur aléatoire entière entre 0 et 10.
B prend la valeur $N \times A$.
Afficher B.
Fin

1. On affecte à A la valeur 5. On obtient, par exemple, $B = 15$.

a. Quelle est alors la valeur de N ? $N = 3$ .....

b. Donner deux autres valeurs possibles pour B :

$B = 10$ ou $B = 20$ (exemples) .....

2. Cet algorithme définit-il une fonction ? Non, car, au nombre 5, on associe plusieurs valeurs de B. .....

5 On considère l'algorithme suivant, contenant un test :

Variables
A et B sont des nombres réels
Début
Saisir A.
Si $A > 0$ **alors**
  B prend la valeur A.
  Sinon B prend la valeur $-A$.
Fin Si
Afficher B.
Fin

1. Affecter à A la valeur -4.
L'affichage à la sortie de l'algorithme est $B = 4$. .....

2. Cet algorithme définit une fonction.

a. L'ensemble de définition est $D = \mathbb{R}$. .....

b. Deux nombres peuvent-ils avoir la même image ?
Oui, par exemple, -2 et 2 ont la même image, qui est 2. .....

6 Une école prépare un séjour d'une semaine dans une station de ski, pour un groupe d'élèves.
Pour la semaine, la location d'un appartement, prévu pour 10 personnes au plus, revient à $A = 2\,000$ € et celle du matériel à $M = 120$ € par personne. Le forfait individuel hebdomadaire coûte $F = 150$ €.
On veut écrire un algorithme qui affiche le coût total C, en euros, puis le prix du séjour par personne P, **en euros, en fonction du nombre de participants N**.

1. Quelles valeurs affecte-t-on aux variables suivantes ?

$A = 2\,000$ ..... ; $M = 120$ ..... ; $F = 150$ .....

2. Le tableau ci-dessous présente, en partie, l'écriture en langage de programmation de cet algorithme.

a. Compléter ce programme, puis donner l'affichage obtenu pour un groupe de 8, puis de 10 élèves.

TI 82 Stats.fr, 83	Casio Graph 35+
PROGRAM:SKI :Prompt A :Prompt M :Prompt F :Prompt N :A+M*N+F*N→C :C/N →P :Disp C,P	======SKI===== "A="?→A↵ "M="?→M↵ "F="?→F↵ "N="?→N↵ A+M*N+F*N →C↵ C÷N →P↵ C◢ P◢ →Aide

$N = 8$: $C =$ 4 160 ..... et $P =$ 520 .....
$N = 10$: $C =$ 4 700 ..... et $P =$ 470 .....

b. Écrire l'expression du prix par personne P en fonction du nombre de personnes N.

$$P = f(N) = \frac{2\,000 + 120 \times N + 150 \times N}{N} = \frac{2\,000 + 270 \times N}{N}$$

c. Donner l'affichage obtenu pour un groupe de 8 élèves lorsque $A = 1\,800$, $M = 130$ et $F = 165$.
$C =$ 4 160 ..... et $P =$ 520 .....

Aide

Exercice 6 Les instructions de programmation s'obtiennent par :

	TI 82 Stats.fr, TI83	Casio Graph 35+
Saisir une valeur et la stocker en mémoire	prgm E/S 2 : Prompt A	SHIFT VARS (PRGM) ? → A
Afficher la valeur de A	E/S [illegible]	A ◢