Variations et extremums d'une fonction

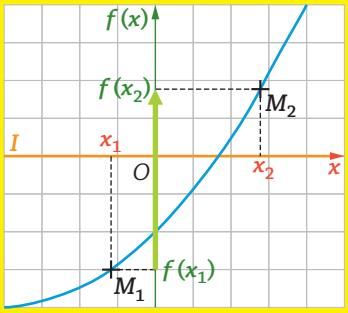
4

Définitions

Sens de variation

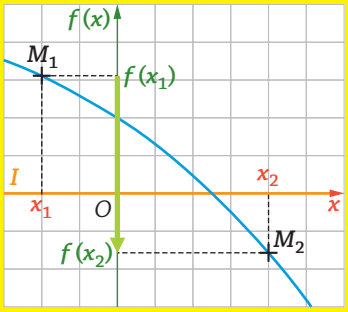
Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition D et I un intervalle inclus dans D.

- La fonction f est **croissante sur l'intervalle I** lorsque, pour tout réel x_1 et tout réel x_2 de l'intervalle I, si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.



Les nombres x_1 et x_2 et leurs images sont rangés dans le **même ordre**.

- La fonction f est **décroissante sur l'intervalle I** lorsque, pour tout réel x_1 et tout réel x_2 de l'intervalle I, si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

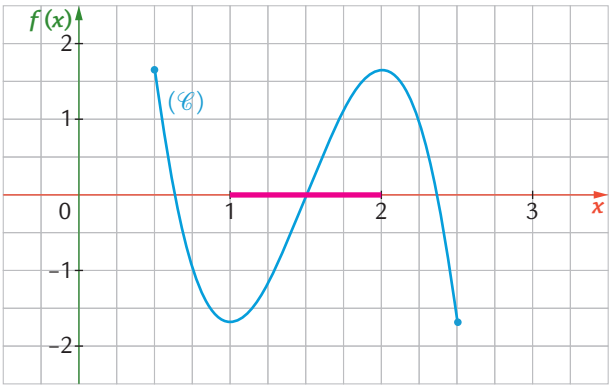


Les nombres x_1 et x_2 et leurs images sont rangés dans **l'ordre inverse**.

- **Étudier les variations de la fonction f** sur son ensemble de définition D, c'est rechercher les intervalles de D sur lesquels cette fonction est croissante et ceux sur lesquels elle est décroissante.
- On résume les variations de la fonction dans un **tableau de variations**.

Maîtriser les méthodes

1 Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0,5 ; 2,5] dont la courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



1. Sur l'axe des abscisses, colorier l'intervalle sur lequel f est croissante.

2. Compléter les phrases suivantes :

a. Sur l'intervalle [0,5 ; 1], f est décroissante.

b. Sur l'intervalle [1 ; 2], f est croissante.

c. Sur l'intervalle [2 ; 2,5], f est décroissante.

d. f est croissante sur l'intervalle [1,5 ; 2], donc $f(1{,}5) \leqslant f(2)$.

e. f est décroissante sur l'intervalle [2 ; 2,5], donc $f(2) \geqslant f(2{,}5)$.

3. La phrase suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
$f(1{,}5) > f(2{,}5)$ donc f est décroissante sur l'intervalle [1,5 ; 2,5].

La phrase est fausse : f est croissante sur l'intervalle [1,5 ; 2] et décroissante sur l'intervalle [2 ; 2,5].

4. a. Placer sur la première ligne du tableau ci-dessous les bornes des intervalles où la fonction est croissante ou décroissante.

Ces valeurs sont lues sur l'axe des abscisses.

b. Sur la deuxième ligne, dessiner les flèches correspondant aux variations de la fonction.

x	0,5	1	2	2,5
$f(x)$	1,6 ↘	– 1,6 ↗	1,6 ↘	–1,6

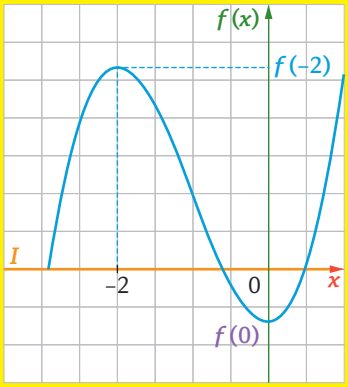
Méthodes

Extremum

Soit $M(x_M\,;f(x_M))$ et $m(x_m\,;f(x_m))$ deux points de la courbe représentative de la fonction f dans un repère ($x_M \in I$ et $x_m \in I$).

- La fonction f admet sur l'intervalle I un **maximum** en x_M lorsque, pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f(x) \leqslant f(x_M)$.
- La fonction f admet un **minimum** en x_m sur l'intervalle I lorsque, pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f(x) \geqslant f(x_m)$.

Exemple : Soit f la fonction dont la courbe représentative est donnée ci-contre. f admet un maximum en -2 et un minimum en 0.



Appliquer

2 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;4]$ par :

$$f(x)=\frac{(x+1)(x-3)}{2}$$

1. Compléter le tableau de variation de cette fonction :

x	-2		1		4
$f(x)$	2,5	↘	-2	↗	2,5

2. Comparer les nombres suivants :

$f(-2)$ > $f(-1)$; $f\left(\frac{2}{3}\right)$ > $f(1)$; $f\left(\frac{5}{3}\right)$ < $f\left(\frac{7}{3}\right)$.

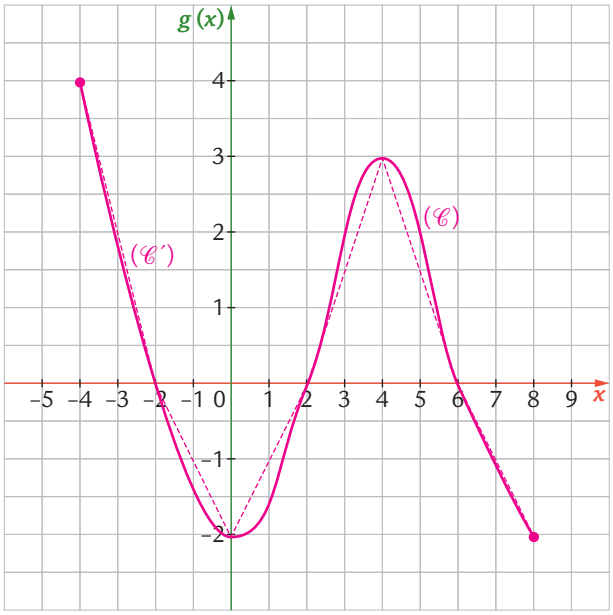
3. Sur l'intervalle $[-2\,;1]$, la fonction f est décroissante.
Sur l'intervalle $[1\,;4]$, la fonction f est croissante.
La fonction f admet un minimum sur l'intervalle $[-2\,;4]$ en $x=1$ de valeur -2.

3 Soit g une fonction, définie sur l'intervalle $[-4\,;8]$, telle que $g(-4)=4$ et telle que l'équation $g(x)=0$ a pour solutions $S=\{-2\,;2\,;6\}$.

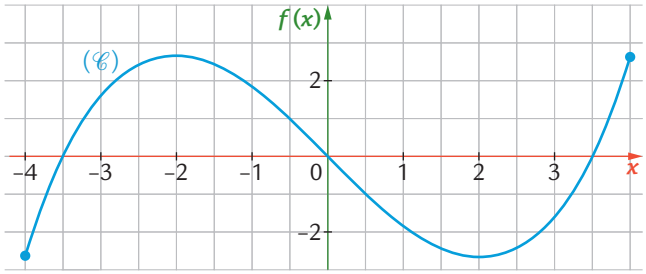
1. Compléter le tableau de variations de la fonction g :

x	-4	-2	0	2	4	6	8
$g(x)$	4	↘ 0	↘ -2	↗ 0	↗ 3	↘ 0	↘ -2

2. Tracer, dans le repère ci-dessous, deux courbes représentatives de la fonction g respectant toutes les données du tableau précédent.



4 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $D=[-4\,;4]$ par la courbe représentative $(\mathscr{C})$ donnée ci-dessous.
Compléter les phrases suivantes avec les expressions « la courbe $(\mathscr{C})$ », « la fonction f », « $f(x)$ », « positive », « négative », « croissante », « décroissante ».



a. Sur l'intervalle $[0\,;3{,}5]$, la courbe $(\mathscr{C})$ se situe en dessous de l'axe des abscisses, donc la fonction f est négative.

b. Sur l'intervalle $[-4\,;-2]$, la fonction f est croissante.

c. L'équation $f(x)=0$ admet trois solutions sur D.

d. Sur l'intervalle $[2\,;3{,}5]$, la fonction f est négative et croissante.

e. Sur l'intervalle $[-2;\,0]$, la fonction f est positive et décroissante.

f. Sur l'intervalle $[-3{,}5\,;0]$, la fonction f admet un maximum en $x=-2$.

g. Sur l'intervalle $[0\,;4]$, la fonction f admet un minimum en $x=2$.

5 Vrai ou faux

Soit h une fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	-3		2		3		10
$h(x)$	9	↘	5	↗	8	↘	-2

Préciser si chaque affirmation est vraie ou fausse. Proposer une correction des phrases fausses.

a. L'ensemble de définition de la fonction h est l'intervalle $[-2\ ;\ 9]$.

Faux : l'ensemble de définition est $[-3\ ;\ 10]$.

b. L'image de 2 par la fonction h est 5.

Vrai.

c. Soit x_1 et x_2 deux nombres réels. Si $-3 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant 2$, alors $h(x_1) \leqslant h(x_2)$.

Faux : h est décroissante sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, donc si $-3 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant 2$, alors $h(x_1) \geqslant h(x_2)$.

d. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[5\ ;\ 8]$.

Faux : la fonction h est croissante sur l'intervalle $[2\ ;\ 3]$.

e. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$.

Vrai.

f. Le maximum de la fonction h est égal à 8 sur l'intervalle $[-3\ ;\ 10]$.

Faux : le maximum de la fonction h est égal à 9 sur l'intervalle $[-3\ ;\ 10]$.

6 La production de q objets entraîne un coût dont le montant s'exprime en fonction de la quantité fabriquée q par $C(q) = 5(q-2)^3 + 10q + 80$, où $q \in [0\ ;\ 6]$, q exprimé en milliers et $C(q)$ en milliers d'euros.
Chaque objet produit est vendu au prix de 70 €.

1. Exprimer, en milliers d'euros, la recette en fonction de q.

$R(q) = 70q$

2. Montrer que le bénéfice $B(q)$, exprimé en milliers d'euros et défini par $B(q) = R(q) - C(q)$, peut s'écrire :

$$B(q) = -5(q-2)^3 + 60q - 80$$

$B(q) = 70q - (5(q-2)^3 + 10q + 80)$

$= 70q - 5(q-2)^3 - 10q - 80$

$= -5(q-2)^3 + 60q - 80$

3. On admet que la fonction B admet un maximum sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$ en $q = 4$. On souhaite vérifier ce résultat à l'aide de la calculatrice.

a. Entrer l'expression de $B(q)$ en **Y1**.

b. En choisissant la fenêtre suivante, représenter la fonction B sur l'écran de la calculatrice : $x_{\text{min}} = 0$; $x_{\text{max}} = 6$; $x_{\text{grad}} = 1$ (*scale* : 1) ; $y_{\text{min}} = -50$; $y_{\text{max}} = 150$; $y_{\text{grad}} = 50$ (*scale* : 50).

c. Pour lire le maximum de la fonction B, suivre les instructions du tableau ci-dessous.

d. Quelles sont les coordonnées, arrondies à l'unité, du point obtenu ?

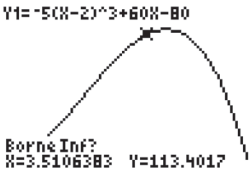
(4 ; 120).

e. Conjecturer : la quantité d'objets à produire pour que le bénéfice soit maximal est de 4 000 objets ; le bénéfice maximal est alors égal à 120 000 euros.

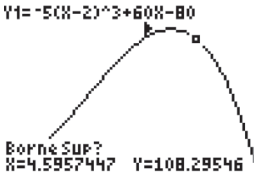
TI 82 Stats.fr, 83

2nde trace **4 : maximum**

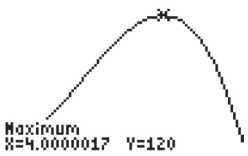
Déplacer le curseur à gauche du point cherché.



Appuyer sur entrer, puis déplacer le curseur à droite du point cherché.

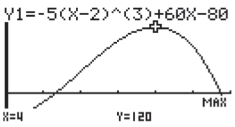


Appuyer deux fois sur entrer.



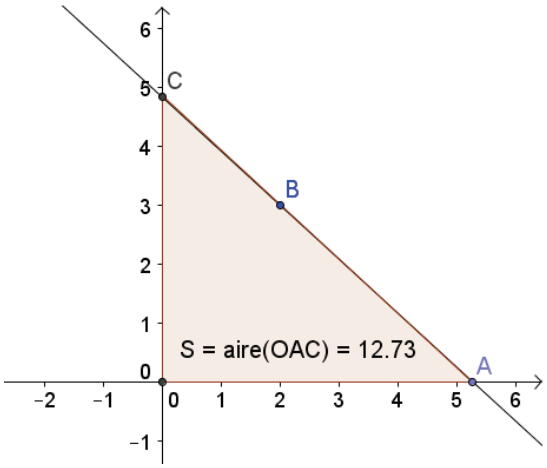
Casio 35+

SHIFT F5 **G-Solve Max**



7 Dans un repère $(O\,;I,J)$, on place le point $A(x\,;0)$, où x est un nombre réel tel que $x>2$, ainsi que le point $B(2\,;3)$.
La droite (AB) coupe l'axe des ordonnées au point C.
On cherche où placer le point A sur l'axe des abscisses pour que l'aire du triangle OAC soit minimale.

1. a. Faire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie, en demandant l'affichage de l'aire S du triangle OAC.



b. Déplacer le point A sur l'axe des abscisses et observer les variations de l'aire du triangle OAC.

c. Recopier les résultats observés, arrondis au dixième, dans le tableau ci-dessous :

x	3	4	5	6	7
$S(x)$	13,5	12	12,5	13,5	14,7

2. Pour répondre au problème posé, il faut exprimer l'aire du triangle en fonction de x.

a. On admet que l'ordonnée du point C est $y_C=\dfrac{3x}{x-2}$.
Donner la formule de l'aire du triangle OAC, puis l'exprimer en fonction de x.

$S=\dfrac{AO\times OC}{2}$ donc $S(x)=\dfrac{x\times\dfrac{3x}{x-2}}{2}=\dfrac{3x^2}{2x-4}$

b. Lire sur la calculatrice la valeur de x pour laquelle l'aire est minimale.

- **Réglage de la fenêtre :** $x_{min}=2{,}5\,;x_{max}=7\,;x_{grad}=0{,}5\,;$ $y_{min}=0\,;y_{max}=20\,;y_{grad}=2$
- **TI :** 2nde calculs trace **3 : minimum**
- **Casio :** SHIFT F5 **G-Solve Min**

(voir p. 19)

La valeur minimale de l'aire du triangle est atteinte pour $x=4$.

c. On admet que, pour tout réel $x>2$, on a :

$$S(x)-12=\frac{3(x-4)^2}{2x-4}$$

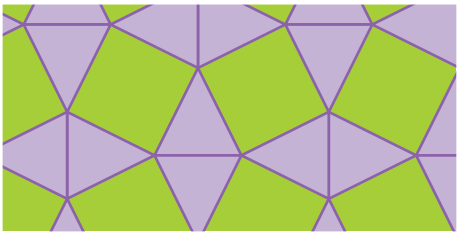
En déduire que, pour tout réel $x>2$, $S(x)\geqslant 12$.

Pour tout réel $x>2$, $\dfrac{3(x-4)^2}{2x-4}\geqslant 0$,

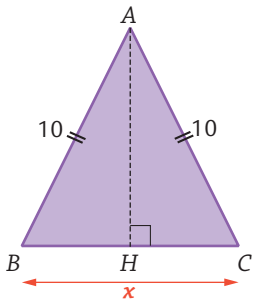
donc $S(x)-12\geqslant 0$ ou encore $S(x)\geqslant 12$

d. Quelle est alors la valeur minimale de l'aire du triangle et pour quelle valeur de x est-elle atteinte ?
La valeur minimale de l'aire du triangle est 12 cm² et ce minimum est atteint pour $x=4$.

8 On veut réaliser un pavage avec des carrés dont les côtés mesurent 10 cm et des triangles isocèles :



On souhaite utiliser le moins de motifs possible.
Pour cela, on calcule la longueur de la base des triangles isocèles afin que leur aire soit maximale.
Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A, où $AB=AC=10$ cm et $BC=x$ cm. On note H le milieu de $[BC]$.



1. Pour répondre au problème, il faut d'abord exprimer l'aire du triangle en fonction de x.

a. À quel intervalle I doit appartenir x pour que le triangle existe ? On rappelle que $BC<BA+AC$.
$0<x\leqslant 10+10$, donc $I=]0\,;20]$.

b. Donner la formule de l'aire du triangle ABC en fonction de x et de AH : $A(x)=\dfrac{x\,AH}{2}$

c. Il reste donc à exprimer AH en fonction de x.
Quel théorème permet de calculer AH dans le triangle ABH ? Donner l'expression de AH en fonction de x.
D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle ABH rectangle en H, on a $BH^2+AH^2=100$.
Donc $AH^2=100-\dfrac{x^2}{4}$. Soit $AH=\sqrt{\left(100-\dfrac{x^2}{4}\right)}$.

d. L'aire du triangle ABC s'exprime donc par :

$$A(x)=\frac{x\sqrt{\left(100-\frac{x^2}{4}\right)}}{2}=\frac{x}{2}\sqrt{\left(100-\frac{x^2}{4}\right)}$$

2. On a défini une fonction A sur l'intervalle I.

a. Représenter cette fonction sur l'écran de la calculatrice.

b. Utiliser les fonctions de la calculatrice pour lire la longueur, arrondie à l'unité, de la base du triangle pour que l'aire du triangle soit maximale : $x\approx$ 14 cm.