Terminale S3	Évaluation de mathématiques n°3 Nombres complexes – Fonction exponentielle Durée 2h	Mardi 6 décembre

Exercice 1 – 5 points

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée.
Indiquer si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse.
Aucun point ne sera attribué à une réponse non justifiée.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\,,\vec{v})$.

1. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $-3-4i$, $-4+3i$ et $3+4i$.

Proposition 1
L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z+3+4i| = |z-3-4i|$ est une droite perpendiculaire à la droite (AC) et passant par le point O.

Proposition 2
L'ensemble des points M d'affixe z telle que $\left|\frac{z+4-3i}{5}\right| = 1$ est le cercle de centre B et de rayon 25.

Proposition 3
Le triangle ABC est isocèle de sommet B.

2. On pose $Z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+3i}$.

Proposition 4
Le module de Z est égal à $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Proposition 5
Un argument de Z égal à $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 2 – 5 points

On considère les nombres complexes $z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z' = 1-i$.

1. Déterminer le module et un argument de z, z' et $\frac{z}{z'}$.

2. Déterminer la forme algébrique de $\frac{z}{z'}$.

3. En déduire que $cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

4. Déterminer $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 3 – 3 points

On rappelle les résultats suivants :

- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée.
- Pour tout x réel positif, $exp(x) > x$.

Soit la fonction $g : x \longmapsto e^x - \frac{x^2}{2}$ définie sur $[0\ ; +\infty[$.

1. Montrer que pour tout x de $[0\ ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

2. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Exercice 4 – 7 points

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = (x + 1)\, e^{-x} - x + 1$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.

3. Déterminer les limites de f' en $+\infty$ et $-\infty$.

4. Étudier les variations de f' puis démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Donner un encadrement de α à 10^{-2}.

5. En déduire le signe de f' puis les variations de f .

6. Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x) - (-x + 1)$.
En déduire une interprétation graphique.

Question BONUS
Soit a un réel donné et f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que les solutions de l'équation $f' = af$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{ax}$ où k est un réel quelconque.

Coloriage…