Terminale S3	Évaluation de mathématiques n°3 Nombres complexes – Fonction exponentielle Durée 2h	Mardi 6 décembre

Exercice 1 – 5 points

Les cinq questions sont indépendantes. Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse. Un point sera attribué pour chaque réponse correctement justifiée. **Aucun point ne sera attribué à une réponse non justifiée**.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\,,\vec{v})$.

1. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $-3-4i$, $-4+3i$ et $3+4i$.

Proposition 1

L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z+\ 3+\ 4i|\ =\ |z-\ 3\ -\ 4i|$ est une droite perpendiculaire à la droite (AC) et passant par le point O.

$|z+\ 3+\ 4i| = |z-\ 3\ -\ 4i| \Leftrightarrow |z-\ (-3-\ 4i)| =\ |z-(\ 3+\ 4i)| \Leftrightarrow MA = MC$ donc M décrit la médiatrice du segment [AC] qui, par définition, est perpendiculaire à la droite (AC) et passe par le milieu I de [AC] or $z_I = \frac{z_A+z_C}{2} = \frac{(-3-4i)+(3+4i)}{2} = 0$ donc $I = O$.

L'affirmation est VRAIE.

Proposition 2

L'ensemble des points M d'affixe z telle que $\left|\frac{z+4-3i}{5}\right| = 1$ est le cercle de centre B et de rayon 25.

$\left|\frac{z+4-3i}{5}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z+4-3i|}{|5|} = 1 \Leftrightarrow |z+4-3i| = 5 \Leftrightarrow |z-(-4+3i)| = 5 \Leftrightarrow MB = 5$ donc le point M décrit le cercle de centre B et de rayon 5.

L'affirmation est FAUSSE.

Proposition 3

Le triangle ABC est isocèle de sommet B.

Calculons BA et BC.

$$BA = |z_A - z_B| = |-3-4i+4-3i| = |1-7i| = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$
$$BC = |z_C - z_B| = |3+4i+4-3i| = |7+i| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$$

On a bien $BA = BC$ donc le triangle est isocèle de sommet B.

L'affirmation est VRAIE.

2. On pose $Z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+3i}$.

Proposition 4

Le module de Z est égal à $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

$$|Z| = \left|\frac{1+i}{\sqrt{3}+3i}\right| = \frac{|1+i|}{|\sqrt{3}+3i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+9}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

L'affirmation est VRAIE.

Proposition 5

Un argument de Z égal à $\frac{\pi}{4}$.

$\arg(Z) = \arg(1+i) - \arg(\sqrt{3}+3i)$.

Or $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$ donc $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

et $\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$ donc $\arg(\sqrt{3}+3i) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

donc $\arg(Z) = \arg(1+i) - \arg(\sqrt{3}+3i) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$

L'affirmation est FAUSSE.

Exercice 2 – 5 points

On considère les nombres complexes $z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z' = 1-i$.

1. Déterminer le module et un argument de z, z' et $\frac{z}{z'}$.

- Soit un θ argument de z.

$|z| = \left|\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{1}{2}|\sqrt{6}-i\sqrt{2}| = \frac{1}{2}\sqrt{6+2} = \frac{1}{2}\times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{-\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

- Soit un θ' argument de z'.

$|z'| = |1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$cos\theta' = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $sin\theta' = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta' = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

2. Déterminer la forme algébrique de $\frac{z}{z'}$.

$\frac{z}{z'} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}-i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\times(\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}-i) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3. En déduire que $cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

$\left|\frac{z}{z'}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\pi}{12}$ donc $\frac{z}{z'} = cos\frac{\pi}{12} + i\times sin\frac{\pi}{12}$ et d'après la question 2, $\frac{z}{z'} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ donc

$cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

4. Déterminer $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$.

$cos\frac{5\pi}{12} = cos\left(\frac{6\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$sin\frac{5\pi}{12} = sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Exercice 3 – 3 points Exercice traité en cours

On rappelle les résultats suivants :

- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée.
- Pour tout x réel positif, $exp(x) > x$.

Soit la fonction $g : x \longmapsto e^x - \frac{x^2}{2}$ définie sur $[0 ; +\infty[$.

1. Montrer que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.
2. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Exercice 4 – 7 points

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = (x + 1)e^{-x} - x + 1$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$: la détermination directe mène à une forme indéterminée.

  $(x + 1)e^{-x} - x + 1 = \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} - x + 1$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ on peut en déduire que

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} = 0$ et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} -x + 1 = -\infty$ on obtient, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$: la détermination directe mène à une forme indéterminée.

  $(x + 1)e^{-x} - x + 1 = \left(x + 1 - \frac{x}{e^{-x}}\right)e^{-x} + 1 = (x + 1 - xe^x)e^{-x} + 1$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 1 - xe^x) = -\infty$. De plus

  $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc, par produit, , $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 1 - xe^x)e^{-x} = -\infty$.

  On en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.

   La fonction $x \longmapsto (x + 1)e^{-x}$ est dérivable en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

   La fonction $x \longmapsto -x + 1$ est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par somme, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x + 1)(-e^{-x}) - 1 = -xe^{-x} - 1$$

3. Déterminer les limites de f' en $+\infty$ et $-\infty$.

$$f'(x) = -xe^{-x} - 1 = -\frac{x}{e^x} - 1$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = -1$.

4. Étudier les variations de f' puis démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α dans ℝ. Donner un encadrement de α à 10^{-2}.

$f'(x) = -xe^{-x} - 1$ est dérivable sur ℝ et sa dérivée f'' est égale à :

$f''(x) = -1e^{-x} - x(-1e^{-x}) = (x-1)e^{-x}$

Le signe de f'' est le même que celui de $(x-1)$, par conséquent on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1-e^{-1}$	$\nearrow$	-1

- Sur $]-\infty\,;1]$ la fonction est continue (car dérivable), strictement décroissante et change de signe donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution sur cet intervalle.
- Sur $[1\,;\,+\infty[$ f' est strictement négative donc l'équation $f'(x) = 0$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.
- En conclusion, l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution sur ℝ.
  A l'aide de la calculatrice on trouve $\alpha \approx -0{,}57$.

5. En déduire le signe de f' puis les variations de f .

D'après la question précédente, on peut dresser le tableau suivant

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$ $\approx 2{,}33$	$\searrow$	$-\infty$

6. Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x) - (-x+1)$.

En déduire une interprétation graphique.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (-x+1)\big) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)e^{-x} = 0$ d'après la question 1.

On peut en déduire que la droite d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à Cf en $+\infty$.