BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DE 2016/2017

BAC BLANC

MATHÉMATIQUES

OBLIGATOIRE

SÉRIE: S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES **COEFFICIENT: 7**

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 / 5 à 5 / 5.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le candidat doit traiter les QUATRE exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (*6 points*)

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A: premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante:

$u_0 = 1000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100$.

1. (a) Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé. On précisera en particulier ce que représente u_n.
(b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.
(c) On peut également utiliser l'algorithme donné **en annexe** pour répondre au problème posé dans la question précédente.
Compléter cet algorithme.

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1000$.
(b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) par: pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.
(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
(b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
(c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B: second modèle – avec une fonction

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par:

$$f(t) = \frac{50}{1 + 49\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}}$$

où t représente le temps exprimé en jours et où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

1. (a) Calculer $f(0)$.
(b) Démontrer que, pour tout réel $t \geq 0$, $f(t) < 50$.
(c) Étudier le sens de variation de la fonction f.
(d) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte.

3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
Montrer que résoudre l'inéquation d'inconnue t , $f(t) > 30$ équivaut à résoudre $e^{0{,}2t} > 73{,}5$.
Proposer une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de t à 0,1 près.
En déduire la réponse au problème.

Exercice 2 (*5 points*)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère l'équation

$$(E): \quad z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
2. On considére la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geq 1$.
   (a) Vérifier que z_1 est une solution de (E).
   (b) Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
   (c) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée en annexe et tracer, sur la figure donnée en annexe, les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.

3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $z_n = 2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n \mathrm{i}}{2}\right)$.
4. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geq 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5. On note $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1, \ell_n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.
   (b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier n tel que $\ell_n \geq 1000$.

Exercice 3 (*4 points*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}.$$

1. Vérifier que pour tout réel $x, f(x) = \mathrm{e} \times \frac{x}{\mathrm{e}^x}$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
4. Déterminer la dérivée de la fonction f.
5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation.
6. Montrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

   Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 4 (*5 points*)

Une association organise une loterie pour laquelle une participation *m* exprimée en euros est demandée.

Un joueur doit tirer simultanément au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.

Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.

Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation *m*.

Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

- sur $\frac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 €,
- sur $\frac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 €,
- sur le reste le joueur est remboursé de sa participation *m*.

On appelle V l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules vertes ».

On appelle J l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes ».

On appelle R l'évènement « le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien ».

1. Quelques calculs.

a. Calculer les probabilités $P(\mathrm{V})$ et $P(\mathrm{J})$ des évènements respectifs V et J.

b. On note $P_{\mathrm{V}}(\mathrm{R})$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes. Déterminer $P_{\mathrm{V}}(\mathrm{R})$ puis en déduire que $P(R \cap V) = \frac{5}{80}$.

c. Calculer $P(\mathrm{R})$.

d. Calculer la probabilité de gagner les 100 €, puis la probabilité de gagner les 20 € de la roue.

2. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est-à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale *m*.

a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire X et vérifier que $P(X = -m) = 0{,}6$.

c. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $E(X) = \frac{140-51m}{80}$.

d. L'organisateur veut fixer la participation *m* à une valeur entière en euro. Quelle valeur minimale faut-il donner à *m* pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

3. Un joueur se présente et décide de jouer 4 fois, quels que soient les résultats obtenus. Calculer la probabilité qu'il perde au moins une fois sa mise.

4. On voudrait qu'un joueur ait plus d'une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner quand il joue une seule fois. On note G cet évènement. Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes. On appelle *n* le nombre de boules jaunes, on suppose $n \geq 1$.
Calculer la valeur minimale de *n* pour que la condition précédente soit vérifiée.

NOM :………………………

Prénom :……………………

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 1

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1000
	n prend la valeur 0
	Tant que .... faire
	  u prend la valeur ....
	  n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher ....

Exercice 2