BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DE 2016/2017

BAC BLANC

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALITÉ

SÉRIE: S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES **COEFFICIENT: 9**

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 / 5 à 5 / 5.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le candidat doit traiter les QUATRE exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (*6 points*)

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A: premier modèle – avec une suite
On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante:

$u_0 = 1000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100$.

1. (a) Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé. On précisera en particulier ce que représente u_n.
(b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.
(c) On peut également utiliser l'algorithme donné **en annexe** pour répondre au problème posé dans la question précédente.
Compléter cet algorithme.

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1000$.
(b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) par: pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.
(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
(b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
(c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B: second modèle – avec une fonction
On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par:

$$f(t) = \frac{50}{1 + 49\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}}$$

où t représente le temps exprimé en jours et où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

1. (a) Calculer $f(0)$.
(b) Démontrer que, pour tout réel $t \geq 0$, $f(t) < 50$.
(c) Étudier le sens de variation de la fonction f.
(d) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte.

3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
Montrer que résoudre l'inéquation d'inconnue t , $f(t) > 30$ équivaut à résoudre $e^{0{,}2t} > 73{,}5$.
Proposer une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de t à 0,1 près.
En déduire la réponse au problème.

Exercice 2 (*5 points*)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère l'équation

$$(E):\quad z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

2. On considére la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geq 1$.
   (a) Vérifier que z_1 est une solution de (E).
   (b) Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
   (c) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée en annexe et tracer, sur la figure donnée en annexe, les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.

3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $z_n = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n \mathrm{i}}{2}\right)$.

4. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geq 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5. On note $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1, \ell_n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.
   (b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier n tel que $\ell_n \geq 1000$.

Exercice 3 (*4 points*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}.$$

1. Vérifier que pour tout réel $x, f(x) = \mathrm{e}\times \frac{x}{\mathrm{e}^x}$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

4. Déterminer la dérivée de la fonction f.

5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation.

6. Montrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 4 (*5 points*)

Partie A : préliminaires

1. ***a.*** Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que : $n^2 \equiv N-1 \; mod \; N$.
   Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1 \; mod \; N$.
   b. Déduire de la question précédente un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1 \; mod \; 26$.

On admettra que l'unique entier k tel que : $0 \le k \le 25$ et $5k \equiv 1 \bmod 26$ vaut 21.

2. On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.
   - ***a.*** Calculer la matrice $6A - A^2$.
   - ***b.*** En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1}, peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, ou α et β sont deux réels que l'on déterminera.
   - ***c.*** Vérifier que : $B = 5A^{-1}$.
   - ***d.*** Démontrer que si $AX = Y$, alors $5X = BY$.

Partie B : procédure de codage

• Le mot à coder est remplacé par la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

• La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

• La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.

• Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple : « OU » (mot à coder) donne « YE » :

$$\text{OU} \to X = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \to R = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \to \text{YE}.$$

__**Question :**__ Coder le mot « ET », en utilisant et en détaillant la procédure de codage décrite ci-dessus.

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que : $Y = AX$.

1. Démontrer que : $\begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$.

2. En utilisant la question ***1. b.*** de la **partie A**, établir que : $\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \bmod 26 \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \bmod 26 \end{cases}$.

3. Décoder le mot « QP ».

NOM :………………………

Prénom :……………………

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 1

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1000
	n prend la valeur 0
	Tant que .... faire
	  u prend la valeur ....
	  n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher ....

Exercice 2