Corrigé du Bac Blanc

Exercice 1 (6 points) Asie Juin 2016

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A: premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante:

$u_0 = 1000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100$.

1. (a) Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé. On précisera en particulier ce que représente u_n.

On appelle u_n la masse, en gramme, des bactéries présentes dans la cuve, et n représente le nombre de jours depuis le début du processus. On a donc $u_0 = 1000$ puisqu'initialement, on introduit 1 kg soit 1000 grammes de bactéries.

D'un jour à l'autre, le nombre de bactéries augmente de 20 %, c'est donc qu'il est multiplié par $1 + \frac{20}{100} = 1{,}2$.
Chaque jour, en remplaçant le milieu nutritif, on perd 100 grammes de bactéries.

Donc, pour tout n, $u_{n+1} = 1{,}2\, u_n - 100$ avec $u_0 = 1000$.

(b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg soit 30000 g.
On cherche le plus petit entier n tel que $u_n > 30000$.
À la calculatrice, on trouve $u_{22} \approx 28103$ et $u_{23} \approx 33624$; donc on dépasse 30 kg de bactéries à partir de 23 jours.

(c) On peut également utiliser l'algorithme donné **en annexe** pour répondre au problème posé dans la question précédente.
Compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres
Traitement	u prend la valeur 1000 n prend la valeur 0 Tant que $u \leq 30000$ faire u prend la valeur $1{,}2\times u - 100$ n prend la valeur $n+1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher n

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1000$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n \geq 1000$.

- $u_0 = 1000 \geq 1000$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- On suppose la propriété vraie pour un rang $p \geq 0$, c'est-à -dire $u_p \geq 1000$.
  $u_p \geq 1000$ donc $1{,}2\, u_p \geq 1200$ et $1{,}2\, u_p - 100 \geq 1100 \geq 1000$.
  Donc $1{,}2\, u_p - 100 \geq 1000$ et on a démontré que la propriété était vraie au rang $p + 1$.
- La propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$, donc elle est vraie pour tout $n \geq 0$.
  Pour tout n, $u_n \geq 1000$.

(b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = (1{,}2\, u_n - 100) - u_n = 0{,}2\, u_n - 100$

Or, pour tout n, $u_n \geq 1000$ donc $0{,}2\, u_n \geq 200$ et donc $0{,}2\, u_n - 100 \geq 100$

On a donc démontré que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$.

On peut donc dire que la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) par: pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 500$

$= 1{,}2\, u_n - 100 - 500 = 1{,}2(v_n + 500) - 600 = 1{,}2\, v_n + 600 - 600 = 1{,}2\, v_n$

$v_0 = u_0 - 500 = 1000 - 500 = 500$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}2$ et de premier terme $v_0 = 500$.

(b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

On déduit de la question précédente que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1,2^n$.

Comme, pour tout n, $u_n = v_n + 500$, on en déduit que $u_n = 500 + 500 \times 1,2^n$.

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

La suite (v_n) est géométrique de raison 1,2 et de premier terme positif; or $1{,}2 > 1$ donc, d'après le cours, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Pour tout n, $u_n = v_n + 500$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Partie B: second modèle – avec une fonction

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par:

$$f(t) = \frac{50}{1 + 49\, \mathrm{e}^{-0{,}2t}}$$

où t représente le temps exprimé en jours et où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

1. (a) Calculer $f(0)$.

$$f(0) = \frac{50}{1 + 49\mathrm{e}^0} = \frac{50}{1 + 49} = 1$$

(b) Démontrer que, pour tout réel $t \geq 0$, $f(t) < 50$.

Pour tout t, $\mathrm{e}^{-0{,}2t} > 0$ donc $1 + 49\, \mathrm{e}^{-0{,}2t} > 1$ et donc $\frac{1}{1+49\, \mathrm{e}^{-0{,}2t}} < 1$

On en déduit que $\frac{50}{1+49\, \mathrm{e}^{-0{,}2t}} < 50$ et donc que, pour tout t, $f(t) < 50$.

(c) Étudier le sens de variation de la fonction f.

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et est de la forme $50 \times \frac{1}{u}$ avec $u(x) = 1 + 49e^{-0{,}2t}$ donc sa dérivée est de la forme $f'(t) = 50 \times \left(-\frac{u'}{u^2}\right)$. Or $u'(t) = 49(-0{,}2)e^{-0{,}2t} = -9{,}8e^{-0{,}2t}$.

Donc $f'(t) = 50 \times \frac{9{,}8e^{-0{,}2t}}{(1+49e^{-0{,}2t})^2}$.

Comme $e^{-0{,}2t} > 0$ on en déduit que $f'(t) > 0$ sur $[0; +\infty[$.

On en conclut que la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.

(d) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

$\lim\limits_{t \to +\infty} -0{,}2t = -\infty$; on pose $T = -0{,}2t$. Or $\lim\limits_{T \to -\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{T}} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0{,}2t} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{t \to +\infty} 1 + 49\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 1$ et donc que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 50$.

2. Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte.

On sait que $f(t)$ représente la masse, en kg, de bactéries au temps t, exprimé en jours.

- $f(0) = 1$ signifie que la masse des bactéries à l'instant $t = 0$ est de 1 kg;
- $f(t) < 50$ pour tout t signifie que la masse de bactéries dans la cuve sera toujours inférieure à 50 kg;
- f est croissante signifie que la masse de bactéries augmente régulièrement au fil du temps;
- $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 50$ signifie que la masse de bactéries dans la cuve va se rapprocher de 50 kg.

3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
Montrer que résoudre l'inéquation d'inconnue t , $f(t) > 30$ équivaut à résoudre $e^{0,2t} > 73,5$.
Proposer une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de t à 0,1 près.
En déduire la réponse au problème.

$$\begin{aligned}
f(t) > 30 &\Leftrightarrow \frac{50}{1+49e^{-0,2t}} > 30 \\
&\Leftrightarrow 50 > 30(1+49e^{-0,2t}) \\
&\Leftrightarrow \frac{5}{3} - 1 > 49e^{-0,2t} \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{3\times 49} > e^{-0,2t} \\
&\Leftrightarrow e^{0,2t} > \frac{147}{2} \\
&\Leftrightarrow e^{0,2t} > 73,5
\end{aligned}$$

Or $e^{0,2t} > 73,5 \Leftrightarrow 0,2t > \ln(73,5) \Leftrightarrow t > \frac{\ln(73,5)}{0,2} \approx 21,5$ donc on en conclut que la masse de bactéries dépassera 30 kg au bout de 22 jours.

Exercice 2 (*5 points*) Amérique du Sud Nov 2013

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère l'équation

$$(E):\quad z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

(E) est une équation du second degré à coefficients réels. Calculons le discriminant
$\Delta = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4\times1\times4 = 12 - 16 = -4$.
$\Delta < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées qui sont :
$z' = \frac{-(-2\sqrt{3})+i\sqrt{4}}{2} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{2} = \sqrt{3} + i$ et $z'' = \overline{z'} = \sqrt{3} - i$.
Donc $S = \left\{\sqrt{3} + i\,;\ \sqrt{3} - i\right\}$.

2. On considére la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^n\frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geq 1$.
(a) Vérifier que z_1 est une solution de (E).

$$z_1 = 2^1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-1)^1\frac{\pi}{6}} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{3} - i = z''$$

$z_1 = z''$ donc z_1 est bien solution de (E).

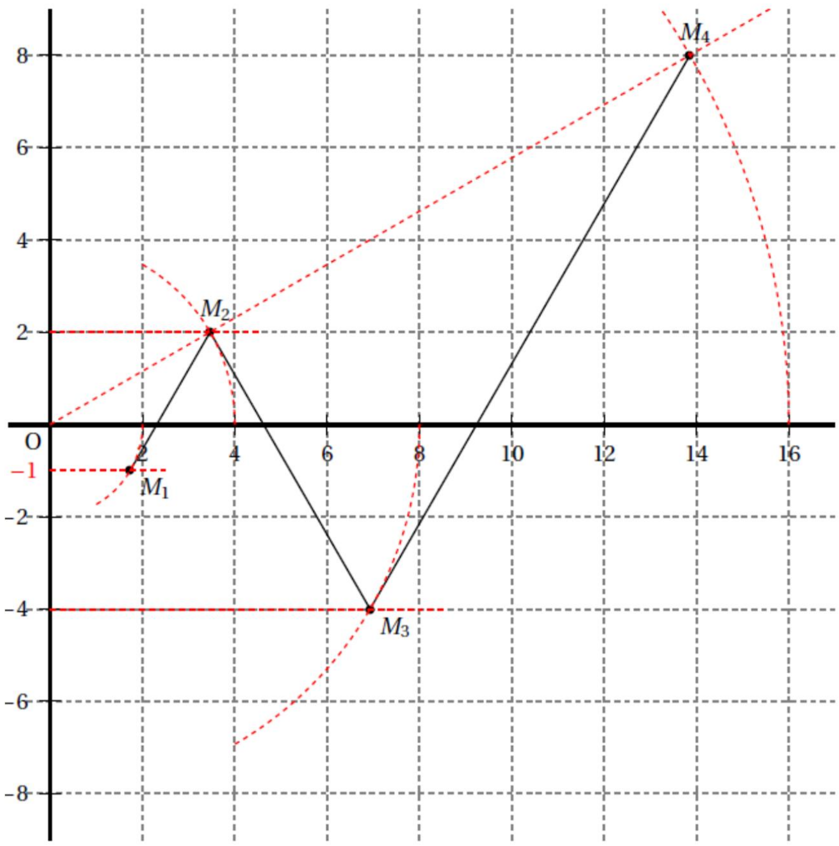
(b) Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.

$$z_2 = 2^2e^{i(-1)^2\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3} + 2i$$

$$z_3 = 2^3e^{i(-1)^3\frac{\pi}{6}} = 8e^{i\frac{-\pi}{6}} = 8\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{-1}{2}i\right) = 4\sqrt{3} - 4i$$

(c) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée en annexe et tracer, sur la figure donnée en annexe, les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.

- $|z_1| = 2$ donc le point M_1 d'affixe z_1 est situé sur le cercle de centre O et de rayon 2 ; de plus, la partie imaginaire de z_1 est -1 donc le point M_1 est situé sur la droite d'équation $y = -1$.
- Pour placer le point M_2, on utilise le fait que $|z_2| = 4$ et que $\text{Im}(z_2) = 2$.
- Pour placer le point M_3, on utilise le fait que $|z_3| = 8$ et que $\text{Im}(z_3) = -4$.
- $z_4 = 2^4 e^{i(-1)^4\frac{\pi}{6}} = 16e^{i\frac{\pi}{6}}$; pour placer le point M_4, on utilise le fait que $|z_4| = 16$; de plus $arg\,(z_4) = \frac{\pi}{6} = arg\,(z_2)$ donc les points O, M_2 et M_4 sont alignés donc $M_4 \in (OM_2)$.



3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $z_n = 2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}\right)$.

- *Si* $n \geq 1$ et n pair alors $(-1)^n = +1$ donc $z_n = 2^n e^{i(-1)^n\frac{\pi}{6}} = 2^n e^{i\frac{\pi}{6}} = 2^n\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

  Or $2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}\right) = 2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$
- *Si* n impair alors $(-1)^n = -1$ donc $z_n = 2^n e^{i(-1)^n\frac{\pi}{6}} = 2^n e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2^n\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right) = 2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{-1}{2}i\right)$

  Or Or $2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}\right) = 2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$
- Dans les deux cas, on a bien $z_n = 2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2}\right)$.

4. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

$$M_1M_2 = |z_2 - z_1| = \left|2\sqrt{3} + 2i - \sqrt{3} + i\right| = \left|\sqrt{3} + 3i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{3 + 9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$M_2M_3 = |z_3 - z_2| = \left|4\sqrt{3} - 4i - 2\sqrt{3} - 2i\right| = \left|2\sqrt{3} - 6i\right| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-6)^2} = \sqrt{12 + 36} = 4\sqrt{3}.$$

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geq 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5. On note $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.

(a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1, \ell_n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.

D'après la question précédente, $l_n = 2\sqrt{3} + 2^2\sqrt{3} + \cdots + 2^n\sqrt{3} = (2 + 2^2 + \cdots + 2^n)\sqrt{3}$

La suite (2^n) définie pour $n \geq 1$ est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $2^1 = 2$; la somme S de ses premiers termes consécutifs est donnée par la formule :

$$S = premier\ terme \times \frac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison}$$

Donc $2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2\times\frac{1-2^n}{1-2} = 2\times\frac{2^n-1}{2-1} = 2(2^n - 1)$.

Pour finir, $l_n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.

(b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier n tel que $\ell_n \geq 1000$.

Le plus petit entier n tel que $l_n \geq 1000$ est 9.
La suite (l_n) est croissante et on peut vérifier que

$$l_8 = 510\sqrt{3} \approx 883 < 1000 \text{ et } l_9 = 1022\sqrt{3} \approx 1770 > 1000$$

Exercice 3 (*4 points*) Amérique du Sud Nov 2013 (Extrait)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$.

1. Vérifier que pour tout réel $x, f(x) = \mathrm{e}\times\frac{x}{\mathrm{e}^x}$.

$$f(x) = xe^{1-x} = xe^1e^{-x} = xe\frac{1}{e^x} = e\frac{x}{e^x}$$

2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(1 - x) = +\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e\frac{x}{e^x} = 0$ car e est une constante.

4. Déterminer la dérivée de la fonction f.

$$f'(x) = 1\times\mathrm{e}^{1-x} + x(-1)\mathrm{e}^{1-x} = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1 - x)e^{1-x}$$

5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation.

On sait que $e^{1-x} > 0$ donc le signe de f' est le même que celui de $(1 - x)$.

On obtient alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

6. Montrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$
de plus $f(]-\infty\,;1]) =]-\infty\,;1]$ et $-1 \in]-\infty\,;1]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $]-\infty\,;1]$.
Sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$ donc l'équation $f(x) = -1$ n'admet aucune solution.
En conclusion, l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
A l'aide de la calculatrice, par encadrement successif, on trouve $-0{,}279 < \alpha < -0{,}278$

Exercice 4 (*5 points*) Asie Juin 2005

Une association organise une loterie pour laquelle une participation m exprimée en euros est demandée.

Un joueur doit tirer simultanément au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.

Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.

Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.

Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

- sur $\frac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 €,
- sur $\frac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 €,
- sur le reste le joueur est remboursé de sa participation m.

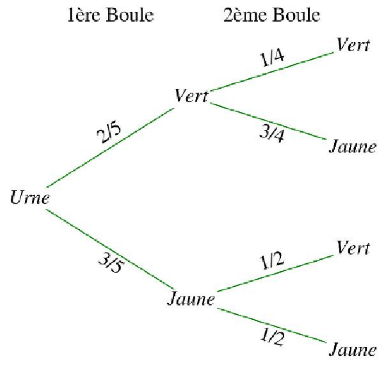
On appelle V l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules vertes ».

On appelle J l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes ».

On appelle R l'évènement « le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien ».

1. Quelques calculs.

a. Calculer les probabilités $P(\text{V})$ et $P(\text{J})$ des évènements respectifs V et J.

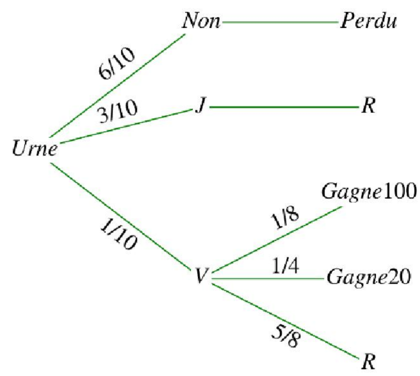


On peut s'aider de l'arbre ci-contre.

On a en suivant la branche supérieure $p(\text{V}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.

De même $p(\text{J}) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$.

b. On note $P_{\text{V}}(\text{R})$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes. Déterminer $P_{\text{V}}(\text{R})$ puis en déduire que $P(R \cap V) = \frac{5}{80}$.



En tournant la roue, la probabilité de gagner 20 € est $\frac{1}{4}$, celle de gagner 100 € est $\frac{1}{8}$; par différence la probabilité d'être remboursé(e) est $\frac{5}{8}$.

On a donc $p_V(\text{R}) = \frac{5}{8}$.

Or $p_V(\text{R}) = \frac{p(\text{V}\cap\text{R})}{p(\text{V})} \Leftrightarrow \frac{5}{8} = \frac{p(\text{V}\cap\text{R})}{\frac{1}{10}} \Leftrightarrow p(\text{V} \cap \text{R}) = \frac{5}{8} \times \frac{1}{10} = \frac{5}{80}$.

c. Calculer $P(\text{R})$.

On a $p(\text{R}) = p(\text{J}) + p(\text{V} \cap \text{R}) = \frac{3}{10} + \frac{5}{80} = \frac{29}{80}$.

d. Calculer la probabilité de gagner les 100 €, puis la probabilité de gagner les 20 € de la roue.

$p(\text{gagner } 100€) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{80}$; $p(\text{gagner } 20€) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{40}$.

2. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est-à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.

a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.

X peut prendre les valeurs : $-m$; $100 - m$; $20 - m$; 0.

b. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire X et vérifier que $P(X = -m) = 0{,}6$.

x_i	$-m$	$100 - m$	$20 - m$	0
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{29}{80}$

c. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $E(X) = \frac{140-51m}{80}$.

On a $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} p_i \times x_i = -\frac{6m}{10} + \frac{100-m}{80} + \frac{20-m}{40} + 0 = \frac{140-51m}{80}$.

d. L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur entière en euro. Quelle valeur minimale faut-il donner à m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

L'organisateur ne perdra pas d'argent si $\mathrm{E}(X) < 0 \Leftrightarrow \frac{140-51m}{80} < 0 \Leftrightarrow m > \frac{140}{51}$.
Donc il faut que m soit au moins fixé à 3 euros.

3. Un joueur se présente et décide de jouer 4 fois, quels que soient les résultats obtenus. Calculer la probabilité qu'il perde au moins une fois sa mise.

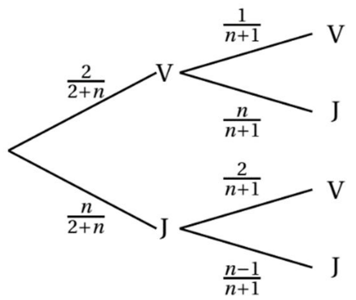
On reconnaît une expérience de Bernoulli avec $p = \frac{4}{10}$ et $n = 4$.

La probabilité de ne pas perdre est égale à $\left(\frac{4}{10}\right)^4$, donc la probabilité de perdre au moins une fois est

$$1 - \left(\frac{4}{10}\right)^4 = 1 - 0{,}0256 = 0{,}9744.$$

4. On voudrait qu'un joueur ait plus d'une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner quand il joue une seule fois. On note G cet évènement. Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes. On appelle n le nombre de boules jaunes, on suppose $n \geq 1$.
Calculer la valeur minimale de n pour que la condition précédente soit vérifiée.

On obtient un nouvel arbre de probabilités :



On doit avoir $\frac{2n}{(n+1)(n+2)} + \frac{2n}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4n}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n^2 - 5n + 2 \geq 0$.
Le trinôme $n^2 - 5n + 2$ a pour racines :
$n_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \approx 4{,}56$ et $n_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{2} \approx 0{,}44$.
Il faut donc qu'il y ait plus de 4 boules jaunes.