Terminale S3	Évaluation de mathématiques n°4 Fonction logarithme népérien Durée 1h30	Mardi 21 février

Exercice 1 – Question de cours (4 points)

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

En déduire que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$.

Exercice 2 (6 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$.
2. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0 ; 1]$, $f(x)$ appartient à $[0 ; 1]$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.
On admet que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0 ; 1]$.

1. Étudier les variations de la suite (u_n).
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
   En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$ et soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1. ***a.*** Étudier la limite de f en 0.
   b. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
   c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe C.

2. ***a.*** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \frac{-1-2\ln x}{x^3}$.
   b. Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $-1 - 2\ln x > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   c. Montrer que $f\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\mathrm{e}}{2}$ puis dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. ***a.*** Démontrer que la courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.