Terminale S3	Évaluation de mathématiques n°4 Fonction logarithme népérien Durée 1h30	Mardi 21 février

Exercice 1 – Question de cours (4 points)

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. (2)

Posons $X = \ln x$ on a alors $e^X = x$ et dire que x tend vers l'infini signifie que e^X tend vers l'infini donc que X tend vers l'infini.

On a alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X}$ or $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ donc par inverse, $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$.

On a bien $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

En déduire que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$. (2)

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, en posant $x = \frac{1}{T}$ il vient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{1/T\to+\infty} \frac{\ln 1/T}{1/T} = 0 \Leftrightarrow \lim_{T\to 0} -T\ln T = 0 \Leftrightarrow \lim_{T\to 0} T\ln T = 0$$

On a bien déduit du résultat précédent que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$

Exercice 2 (7,5 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(x^2+1)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$. (1,5)

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rlcl} & f(x) & = & x \\ \Leftrightarrow & x - \ln(x^2+1) & = & x \\ \Leftrightarrow & \ln(x^2+1) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x^2+1 & = & \mathrm{e}^0 \\ \Leftrightarrow & x^2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x & = & 0 \end{array}$$

2. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (1,5)

La fonction $u: x \mapsto x^2+1$ est une fonction trinôme, donc dérivable là où elle est définie: sur $\mathbb{R}$.
Puisque $u > 0$ sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Finalement, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -\ln(x^2+1)$, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, *sauf pour* $x = 1$: on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à [0 ; 1], $f(x)$ appartient à [0 ; 1]. (1)

f est une fonction strictement croissante donc :

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1 - \ln 2$$

Or $1 - \ln 2 < 1$ donc $0 \leq f(x) \leq 1$.

Ainsi $f(x)$ appartient à [0 ; 1].

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.

On admet que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à [0 ; 1].

1. Étudier les variations de la suite (u_n). (1,5)

$u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2 + 1)$.

Étudions le signe de $-\ln(u_n^2 + 1)$:

Puisque $0 \leq u_n \leq 1$, on en déduit, la fonction carré étant croissante sur [0,1] :

$$0^2 \leq u_n^2 \leq 1^2 \text{ soit } u_n^2 \in [0; 1]$$

Par conséquent : $u_n^2 + 1 \in [1; 2]$

La fonction ln est croissante sur $[1; +\infty[$:

De $u_n^2 + 1 \geq 1$, on déduit $\ln(u_n^2 + 1) \geq \ln 1$, soit $\ln(u_n^2 + 1) \geq 0$.

Puisque $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2 + 1) \geq 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.

2. Montrer que la suite (u_n) est convergente. (1)

D'après la question 1, $u_n \in [0 ; 1]$ la suite u est donc minorée par 0 .

D'après la question 2, (u_n) est décroissante.

(u_n) est décroissante minorée donc elle converge.

3. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
En déduire la valeur de ℓ. (1)

Elle converge donc, en vertu du théorème de la limite monotone, vers un nombre réel ℓ.

Puisque l'équation $f(x) = x$ admet 0 pour unique solution (question A1), on en déduit : $\ell = 0$

<u>Exercice 3</u> (8,5 points) Amérique du Nord Mai 2013

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. par $f(x) = \frac{1+lnx}{x^2}$ et soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1. a. Étudier la limite de f en 0. (1)

On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} 1 + \ln(x) = -\infty$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = -\infty$, alors par produit des limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

b. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$. (1)

On sait que $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, d'autre part $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors par produit des limites $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$.

On a aussi $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, et en ajoutant ces deux dernières limites, on obtient: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe C. (1)

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ prouve que l'axe des ordonnées est asymptote verticale .

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ que l'axe des abscisses est asymptote horizontale.à $\mathcal{C}$

2. ***a.*** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \frac{-1-2\ln x}{x^3}$. (1)

f est dérivable sur $]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x^2-(1+\ln x)2x}{x^4} = \frac{x-2x-2x\ln x}{x^4} = \frac{-x-2x\ln x}{x^4} = \frac{-1-2\ln x}{x^3}$.

b. Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln x > 0$. (1)
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. (0,5)

$-1-2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.
Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $x^2 > 0$ et $f'(x)$ est du signe de $-1-2\ln x$ c'est-à-dire :

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$-1-2\ln x$		$+$	0	$-$	

c. Montrer que $f\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\mathrm{e}}{2}$ puis dresser le tableau des variations de la fonction f. (1)

On a $f\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1-\frac{1}{2}}{\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{-1}} = \frac{\mathrm{e}}{2}$

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	0

3. ***a.*** Démontrer que la courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées. (1)

On a : $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1+\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1}$
Ce qui prouve que la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, le point de coordonnées $(\mathrm{e}^{-1};0)$.

b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. (1)

D'après le tableau des variations de f et sachant que $f(\mathrm{e}^{-1}) = 0$.
On en déduit que $f(x) > 0$ sur l'intervalle $]\mathrm{e}^{-1};+\infty[$ et $f(x) < 0$ sur l'intervalle $]0\,;\mathrm{e}^{-1}[$.