Corrigé du DS n°3 (10 mars 2017)

Exercice 1 (5 points) Antilles Sept 2014

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.
Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.
On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe : $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

1. Calculer l'image de $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ par la fonction f.

$f(-1+\,\mathrm{i}\sqrt{3}) = (-1+\,\mathrm{i}\sqrt{3})^2 + 2(-1+\,\mathrm{i}\sqrt{3}) + 9 = 1 - 2\,\mathrm{i}\sqrt{3} - 3 - 2 + 2\,\mathrm{i}\sqrt{3} + 9 = 5$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.

On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(\mathrm{z}) = 5$:

$f(z) = 5 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 9 = 5 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 4 = 0;\ \Delta = 4 - 16 = -12 = -(2\sqrt{3})^2$

Donc l'équation admet deux racines complexes conjuguées: $\frac{-2+2\,\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = -1+\,\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $-1-\,\mathrm{i}\sqrt{3}$

Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.

On appelle A le point d'affixe $z_A = -1+\,\mathrm{i}\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $z_B = -1-\,\mathrm{i}\sqrt{3}$

$|z_A| = \sqrt{1+3} = 2$

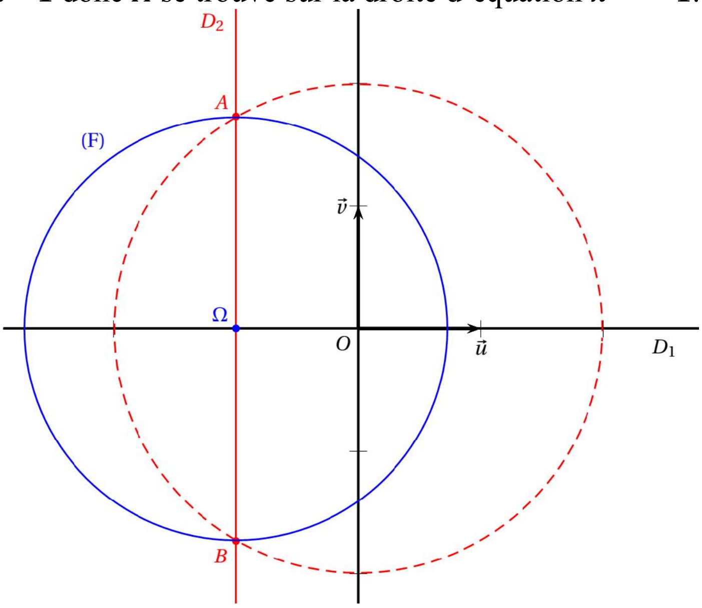
Soit θ_A un argument de z_A: $\left.\begin{array}{l}\cos\theta_A = -\frac{1}{2}\\ \sin\theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta_A = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc $z_A = 2\,\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\pi}{3}}$

Les nombres complexes z_A et z_B sont conjugués, donc ils ont le même module et des arguments opposés donc $z_B = 2\,\mathrm{e}^{-\frac{2\,\mathrm{i}\pi}{3}}$.

Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
On laissera les traits de construction apparents.

$|z_A| = 2$ donc le point A se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 2.
De plus la partie réelle de A vaut -1 donc A se trouve sur la droite d'équation $x = -1$. Idem pour B.



3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

$f(z) = \lambda \Leftrightarrow z^2 + 2z + 9 = \lambda \Leftrightarrow z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$
Pour que l'équation $f(z) = \lambda$ admette deux solutions complexes conjuguées, il faut et il suffit que le discriminant du polynôme $z^2 + 2z + 9 - \lambda$ soit strictement négatif.
$\Delta = 4 - 4(9 - \lambda) = 4 - 36 + 4\lambda = 4\lambda - 32; \Delta < 0 \Leftrightarrow 4\lambda - 32 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 8$

L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées est l'intervalle $]-\infty\,;\, 8[$.

4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $|f(z) - 8| = 3$.
Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1; 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
Tracer (F) sur le graphique.

$f(z) - 8 = z^2 + 2z + 9 - 8 = z^2 + 2z + 1 = (z + 1)^2$;
donc $|f(z) - 8| = |(z + 1)^2| = |z + 1|^2$ car le module d'un carré est égal au carré du module.
Donc $|f(z) - 8| = 3 \Leftrightarrow |z + 1|^2 = 3 \Leftrightarrow |z + 1| = \sqrt{3}$
Soit Ω le point d'affixe -1, donc de coordonnées $(-1\,;\, 0)$; si on appelle M le point d'affixe z, alors $|z + 1| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$.
L'ensemble des points M vérifiant $|z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{3}$.
On trace (F) sur le graphique.

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.
   (a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est
$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$

$$\begin{aligned} f(z) = z^2 + 2z + 9 &= (x + \mathrm{i}y)^2 + 2(x + \mathrm{i}y) + 9 \\ &= x^2 + 2\,\mathrm{i}xy - y^2 + 2x + 2\,\mathrm{i}y + 9 \\ &= x^2 - y^2 + 2x + 9 + \mathrm{i}(2xy + 2y) \end{aligned}$$

   (b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.

$$\begin{aligned} f(z) \text{ réel} &\Leftrightarrow 2xy + 2y = 0 \\ &\Leftrightarrow 2y(x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{aligned}$$
Donc (E) est la réunion de deux droites D_1 d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) et D_2 d'équation $x = -1$.

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

Le cercle (F) est de centre Ω d'affixe -1 et de rayon $\sqrt{3}$.
Donc les points d'intersection du cercle (F) avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $\left(-1 - \sqrt{3}\,;\, 0\right)$ et $\left(-1 + \sqrt{3}\,;\, 0\right)$.
Les points A et B ont pour affixes z_A et z_B dont les parties réelles sont égales à -1; donc A et B sont situés sur la droite D_2.

$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = \left|-1 + \mathrm{i}\sqrt{3} + 1\right| = \left|\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$ donc le point A appartient au cercle (F).

$\Omega B = |z_B - z_\Omega| = \left|-1 - \mathrm{i}\sqrt{3} + 1\right| = \left|-\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$ donc le point B appartient au cercle (F).

Les coordonnées des quatre points d'intersection des ensembles (E) et (F) sont:
$$\left(-1 - \sqrt{3}\,;\, 0\right), \left(-1 + \sqrt{3}\,;\, 0\right), \left(-1\,;\, \sqrt{3}\right) \text{ et } \left(-1\,;\, -\sqrt{3}\right)$$

Exercice 3 (6points) Am du Nord Mai 2015

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x) = \ln(x) + x - 3$.

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

La fonction est la somme des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x-3$, toutes deux strictement croissantes sur $]0\,;+\infty[$, elle est donc strictement croissante sur cet intervalle.

On pouvait également dériver la fonction u et constater que la dérivée est strictement positive sur l'intervalle considéré.

2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

Remarquons que la fonction ln conserve les inégalités strictes puisqu'elle est strictement croissante.

Calculons $u(2) = \ln(2) - 1$ or $\ln(2) < \ln() = 1$ car > 2. On prouve ainsi que $u(2) < 0$.

D'autre part, $u(3) = \ln(3)$ or $\ln(3) > \ln(1) = 0$ car $3 > 1$, ce qui montre que $u(3) > 0$.

Notons également que u est continue comme somme de fonctions continues.

Nous sommes donc dans les conditions d'application du **théorème des valeurs intermédiaires**.

0 possède ainsi un antécédent par u dans l'intervalle $[2\,;3]$.

Comme u est strictement monotone sur $]0\,;+\infty[$, cet antécédent α est unique sur $]0\,;+\infty[$.

Ici, on pouvait également expliquer que l'on constate à la calculatrice que $u(2) < 0$ et $u(3) > 0$. Mais cet argument est nettement moins satisfaisant d'un point de vue du raisonnement.

3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Compte-tenu du sens de variation de u, on a:

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	‖	-	0	+	

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $\left(1 - \frac{1}{x}\right)[ln(x) - 2] + 2$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

Nous savons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$.

Par opérations sur les limites, on en déduit que: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$

2. (a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$,$f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme sommes et produits de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

Pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2 + x - 1)$$

$$= \frac{1}{x^2}(\ln(x) + x - 3)$$

$$= \frac{1}{x^2}u(x)$$

(b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Pour tout $x>0$, $x^2>0$. Ainsi le signe de f' est celui de u.

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0\,;\alpha]$ et strictement croissante sur $]\alpha\,;+\infty]$.

Partie C

Soit $\mathcal{C}'$ la courbe d'équation $y=\ln(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f(x)-\ln(x)=\frac{2-\ln(x)}{x}$.
En déduire que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

Un point $M(x\,;y)$ appartient aux deux courbes à la fois lorsque:

$$\begin{cases} y &= f(x) \\ y &= \ln(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= \ln(x) \\ f(x) &= \ln(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= \ln(x) \\ 0 &= f(x)-\ln(x) \end{cases}$$

On calcule:

$$f(x)-\ln(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2-\ln(x)$$

$$=\frac{1}{x}\left[(x-1)(\ln(x)-2)+2x-x\ln(x)\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[x\ln(x)-2x-\ln(x)+2+2x-x\ln(x)\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left(2-\ln(x)\right)$$

Or $2-\ln(x)=0$ n'a qu'une solution qui est $x=e^2$.

Les deux courbes se coupent donc en un unique point d'abscisse $x=e^2$ et d'ordonnée $y=\ln\left(e^2\right)=2$.

2. On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $H(x)=\frac{1}{2}[\ln(x)]^2$est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=\frac{ln(x)}{x}$.
Calculer $I=\int_1^{e^2}\frac{2-\ln(x)}{x}dx$. Interpréter graphiquement ce résultat.

On utilise la linéarité de l'intégrale:

$$I=\int_1^{e^2}\frac{2-\ln(x)}{x}\mathrm{d}x=2\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int_1^{e^2}\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$$

Or ln est une primitive de $x\mapsto\frac{1}{x}$ et H est une primitive de $x\mapsto\frac{\ln(x)}{x}$.Ainsi:

$$I=2\left[\ln(x)\right]_1^{e^2}-\left[H(x)\right]_1^{e^2}$$

$$=2\left(\ln\left(e^2\right)-\ln(1)\right)-\frac{1}{2}\left(\ln\left(e^2\right)^2-\ln(1)^2\right)$$

$$=2$$

L'aire délimitée par $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=e^2$ est donc égale à 2.

Exercice 3 (4 points) Métropole sept 2016

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.
Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1-a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

Variables :	a, b, d, s sont des entiers i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :	a prend la valeur 0 b prend la valeur 0 Saisir n

Traitement :	Pour i allant de 1 à n faire
	  d prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 6
	  Si $d \leq 2$
	    alors a prend la valeur $1-a$
	    sinon Si $d \leq 4$
	      alors b prend la valeur $1-b$
	    FinSi
	  FinSi
	  s prend la valeur $a+b$
	FinPour

Sortie :	Afficher s

(a) On exécute cet algorithme en saisissant $n=3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	s
initialisation			**0**	**0**	
1[er] passage boucle Pour	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
2[e] passage boucle Pour	**2**	**6**	**1**	**0**	**1**
3[e] passage boucle Pour	**3**	**4**	**1**	**1**	**2**

(b) Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ?

Les variables a et b sont à 0 ou 1 selon que la pièce montre le côté face ou le côté pile; la variable $s=a+b$ donne donc le nombre de pièces qui sont du côté pile.

À la fin de cet algorithme, $s=2$ donc les deux pièces sont du côté pile.

2. Pour tout entier naturel n, on note :

- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
- Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».
  De plus on note, $x_n = P(X_n)$; $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n et Z_n.

(a) Donner les probabilités x_0 , y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.

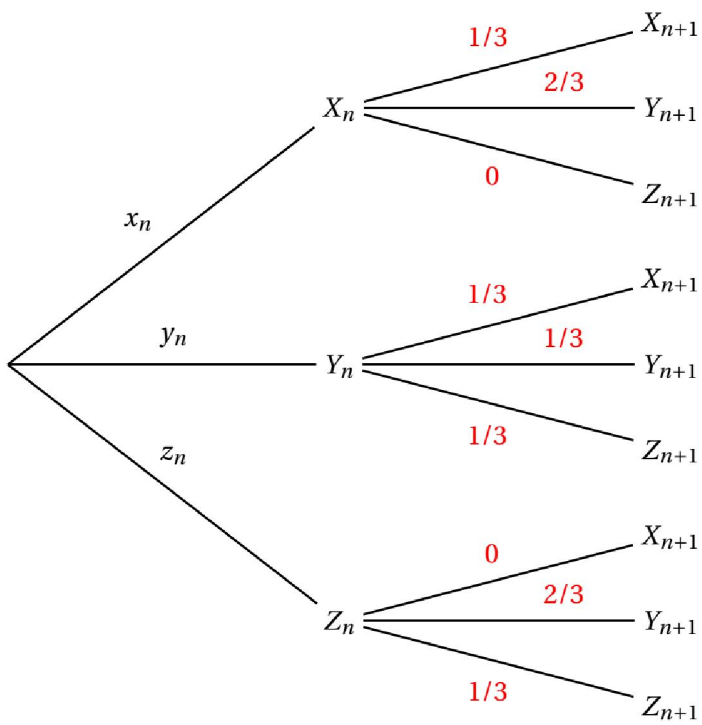
Au début du jeu les deus pièces sont du côté face donc $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et $z_0 = 0$.

(b) Justifier que $P_{X_n}(X_{n+1}) = \frac{1}{3}$.

X_{n+1} est l'événement « À l'issue de $n+1$ lancers de dés, les deux pièces sont du côté face » on cherche donc la probabilité que, à l'issue de $n+1$ lancers, les deux pièces soient du côté face sachant qu'à l'issue de n lancers elles étaient déjà les deux du côté face.

Il faut donc qu'il n'y ait aucun retournement de pièce lors du $(n+1)$-ième lancer, c'est-à -dire qu'il faut que le dé tombe sur 5 ou 6; la probabilité de l'événement $\{5; 6\}$ est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ puisque le dé est bien équilibré et donc qu'il y a équiprobabilité. Donc $P_{X_n}(X_{n+1}) = \frac{1}{3}$.

(c) Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches, certaines pouvant être nulles :



(d) Pour tout entier naturel n, exprimer z_n en fonction de x_n et y_n.

Pour tout entier naturel n, $x_n + y_n + z_n = 1$ donc $z_n = 1 - x_n - y_n$.

(e) En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_{n+1} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}$.

D'après la formule des probabilités totales:

$$y_{n+1} = P(Y_{n+1}) = P(X_n \cap Y_{n+1}) + P(Y_n \cap Y_{n+1}) + P(Z_n \cap Y_{n+1}) = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}z_n$$
$$= \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}(1 - x_n - y_n) = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_n - \frac{2}{3}y_n = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}$$

(f) On pose, pour tout entier naturel n, $b_n = y_n - \frac{1}{2}$.
Montrer que la suite (b_n) est géométrique.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

On pose, pour tout entier naturel n, $b_n = y_n - \frac{1}{2}$ donc $y_n = b_n + \frac{1}{2}$.

$$b_{n+1} = y_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(b_n + \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{1}{3}b_n - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}b_n - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$
$$= -\frac{1}{3}b_n$$

$$b_0 = y_0 - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Donc la suite (b_n) est géométrique de raison $q = -\frac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = -\frac{1}{2}$.

On peut donc dire que, pour tout n, $b_n = b_0 \times q^n = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Comme $y_n = b_n + \frac{1}{2}$, on en conclut que, pour tout n, $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

(g) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.
Interpréter le résultat.

La suite (b_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$; comme $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, on sait que la suite (b_n) est convergente vers 0.

Or, pour tout n, $y_n = b_n + \frac{1}{2}$, donc la suite (y_n) est convergente vers $\frac{1}{2}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \frac{1}{2}$.

Donc à long terme, la probabilité d'avoir une pièce côté face et une pièce côté pile va tendre vers 0,5.