Durée : 4 heures.

SPÉCIALITÉ

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (6 points)

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.
Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ par la fonction f.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
On laissera les traits de construction apparents.

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$|f(z) - 8| = 3.$$

Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1; 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
Tracer (F) sur le graphique.

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.
(a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$

(b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

Exercice 2 (6 points)

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

2. On pose $\alpha = n + 3$ et $\beta = 2n + 1$ et on note δ le PGCD de α et β.
(a) Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ.
(b) Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n - 2)$ est multiple de 5.

3. On considère les nombres a et b définis par :

$$\begin{aligned} a &= n^3 + 2n^2 - 3n \\ \mathrm{b} &= 2n^2 - n - 1 \end{aligned}$$

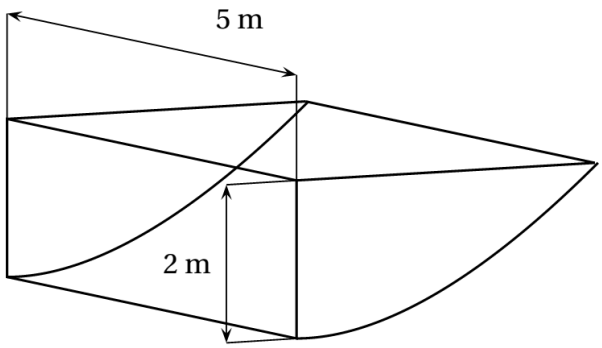
Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n - 1)$.

4. (a) On note d le PGCD de $n(n + 3)$ et de $(2n + 1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta = d$.
(b) En déduire le PGCD, Δ, de a et b en fonction de n.
(c) Application :
Déterminer Δ pour $n = 2001$;
Déterminer Δ pour $n = 2002$.

Exercice 3 *(8 points)*

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.
Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

- elle doit être située à deux mètres de sa maison;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres;
- elle doit mesurer cinq mètres de long;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

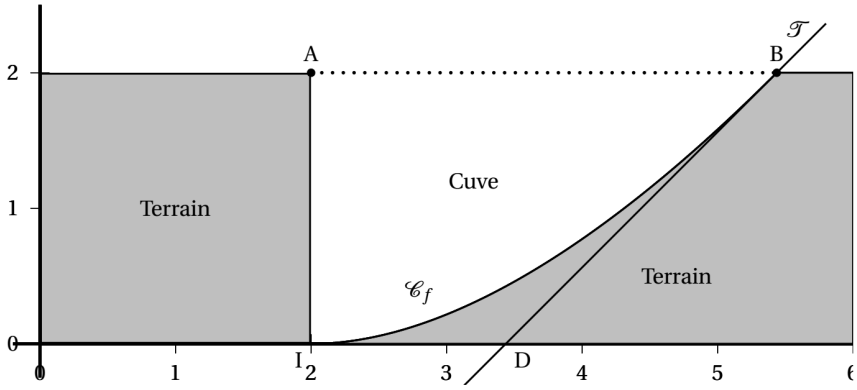


Cette cuve est schématisée ci-contre.

La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[2; 2\mathrm{e}]$ définie par:

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unité 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve.
On considère les points A(2 ; 2), I(2 ; 0) et B(2e ; 2).



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

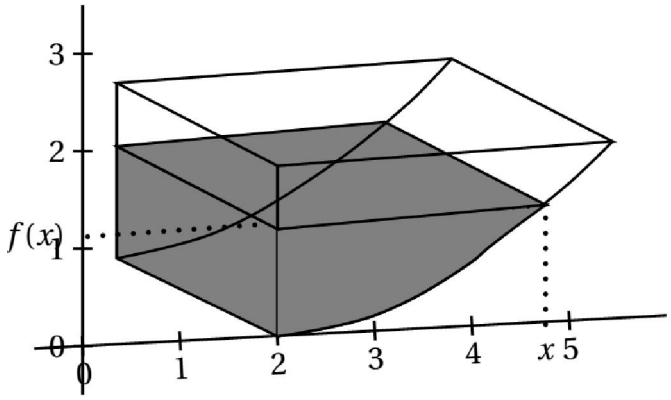
1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point I.
2. On note $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite $\mathcal{T}$ avec l'axe des abscisses.
   (a) Déterminer une équation de la droite $\mathcal{T}$ et en déduire les coordonnées de D.
   (b) On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, les droites d'équations $y = 2,\ x = 2$ et $x = 2\mathrm{e}$.
   S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze AIDB.
   Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?
3. (a) Montrer que, sur l'intervalle [2 ; 2e], la fonction G définie par $G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$ est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.
   (b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle [2 ; 2e].
   (c) Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et 2e, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle [2 ; 2e],

$$v(x) = 5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right].$$



1. Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?

2. On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre.

Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

```
Variables :     a est un réel
                b est un réel
Traitement :    a prend la valeur 2
                b prend la valeur 2 e
                Tant que v(b) − v(a) > 10^−3 faire :
                    c prend la valeur (a + b)/2
                    Si v(c) < V/2, alors :
                        a prend la valeur c
                    Sinon
                        b prend la valeur c
                    Fin Si
                Fin Tant que
Sortie :        Afficher f(c)
```