# Corrigé du DS n°3 (10 mars 2017)

## Exercice 1 (5 points) Antilles Sept 2014

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.
Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.
On considère la fonction $f$ qui à tout nombre complexe $z$ associe : $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

**1.** Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction $f$.

$f(-1 + i\sqrt{3}) = (-1 + i\sqrt{3})^2 + 2(-1 + i\sqrt{3}) + 9 = 1 - 2i\sqrt{3} - 3 - 2 + 2i\sqrt{3} + 9 = 5$

**2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.

On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(\mathrm{z}) = 5$:

$f(z) = 5 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 9 = 5 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 4 = 0$; $\Delta = 4 - 16 = -12 = -(2\sqrt{3})^2$

Donc l'équation admet deux racines complexes conjuguées: $\frac{-2+2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$

Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.

On appelle $A$ le point d'affixe $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ et $B$ le point d'affixe $z_B = -1 - i\sqrt{3}$

$|z_A| = \sqrt{1+3} = 2$

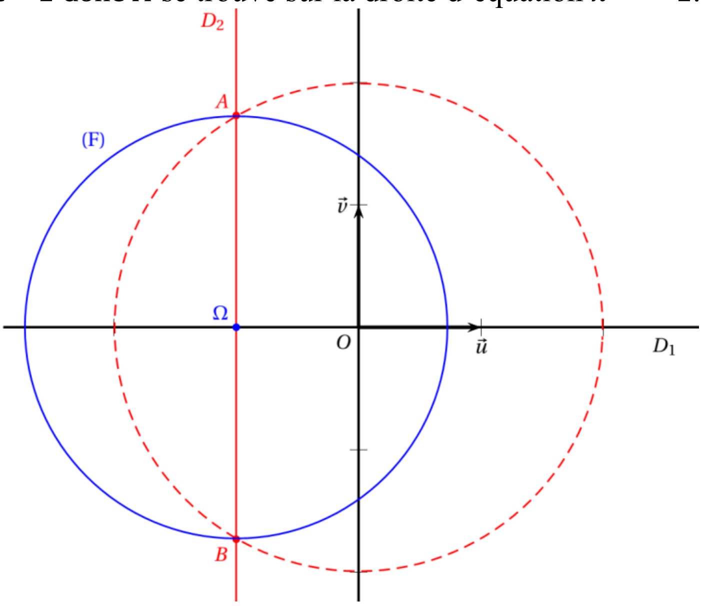
Soit $\theta_A$ un argument de $z_A$: $\left.\begin{array}{l}\cos\theta_A = -\frac{1}{2}\\ \sin\theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta_A = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc $z_A = 2\,e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Les nombres complexes $z_A$ et $z_B$ sont conjugués, donc ils ont le même module et des arguments opposés donc $z_B = 2\,e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
On laissera les traits de construction apparents.

$|z_A| = 2$ donc le point $A$ se trouve sur le cercle de centre $O$ et de rayon 2.
De plus la partie réelle de $A$ vaut $-1$ donc $A$ se trouve sur la droite d'équation $x = -1$. Idem pour $B$.



**3.** Soit $\lambda$ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue $z$.
Déterminer l'ensemble des valeurs de $\lambda$ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

$f(z) = \lambda \Leftrightarrow z^2 + 2z + 9 = \lambda \Leftrightarrow z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$
Pour que l'équation $f(z) = \lambda$ admette deux solutions complexes conjuguées, il faut et il suffit que le discriminant du polynôme $z^2 + 2z + 9 - \lambda$ soit strictement négatif.
$\Delta = 4 - 4(9 - \lambda) = 4 - 36 + 4\lambda = 4\lambda - 32$; $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4\lambda - 32 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 8$

L'ensemble des valeurs de $\lambda$ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées est l'intervalle $]-\infty\,;\,8[$.

**4.** Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe $z$ vérifie $|f(z) - 8| = 3$.
Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1; 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
Tracer (F) sur le graphique.

$f(z) - 8 = z^2 + 2z + 9 - 8 = z^2 + 2z + 1 = (z + 1)^2$;
donc $|f(z) - 8| = |(z + 1)^2| = |z + 1|^2$ car le module d'un carré est égal au carré du module.
Donc $|f(z) - 8| = 3 \Leftrightarrow |z + 1|^2 = 3 \Leftrightarrow |z + 1| = \sqrt{3}$
Soit $\Omega$ le point d'affixe $-1$, donc de coordonnées $(-1\,;\,0)$; si on appelle $M$ le point d'affixe $z$, alors $|z + 1| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$.
L'ensemble des points $M$ vérifiant $|z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$ est le cercle de centre $\Omega$ et de rayon $\sqrt{3}$.
On trace (F) sur le graphique.

**5.** Soit $z$ un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où $x$ et $y$ sont des nombres réels.
(a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est
$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$

$$\begin{aligned} f(z) = z^2 + 2z + 9 &= (x + iy)^2 + 2(x + iy) + 9 \\ &= x^2 + 2\,ixy - y^2 + 2x + 2\,iy + 9 \\ &= x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y) \end{aligned}$$

(b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe $z$ est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
Montrer que (E) est la réunion de deux droites $D_1$ et $D_2$ dont on précisera les équations.
Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.

$$\begin{aligned} f(z) \text{ réel} &\Leftrightarrow 2xy + 2y = 0 \\ &\Leftrightarrow 2y(x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = -1 \end{aligned}$$

Donc (E) est la réunion de deux droites $D_1$ d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) et $D_2$ d'équation $x = -1$.

**6.** Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

Le cercle (F) est de centre $\Omega$ d'affixe $-1$ et de rayon $\sqrt{3}$.
Donc les points d'intersection du cercle (F) avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $\left(-1 - \sqrt{3}\,;\,0\right)$ et $\left(-1 + \sqrt{3}\,;\,0\right)$.
Les points $A$ et $B$ ont pour affixes $z_A$ et $z_B$ dont les parties réelles sont égales à $-1$; donc $A$ et $B$ sont situés sur la droite $D_2$.

$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = \left|-1 + i\sqrt{3} + 1\right| = \left|i\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$ donc le point $A$ appartient au cercle (F).

$\Omega B = |z_B - z_\Omega| = \left|-1 - i\sqrt{3} + 1\right| = \left|-i\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$ donc le point $B$ appartient au cercle (F).

Les coordonnées des quatre points d'intersection des ensembles (E) et (F) sont:
$$\left(-1 - \sqrt{3}\,;\,0\right), \left(-1 + \sqrt{3}\,;\,0\right), \left(-1\,;\,\sqrt{3}\right) \text{ et } \left(-1\,;\,-\sqrt{3}\right)$$

*Exercice 2 (4 points) Polynésie Juin 2002*

$n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

**1.** Montrer que $n$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.

Une seule étape avec l'algorithme d'Euclide : $2n+1 = 2\times n + 1$.
Ceci prouve que $PGCD(2n+1\,;n) = 1$ donc que $n$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.

**2.** On pose $\alpha = n+3$ et $\beta = 2n+1$ et on note $\delta$ le PGCD de $\alpha$ et $\beta$.

(a) Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de $\delta$.

$$\begin{aligned} 2\alpha - \beta &= 2(n+3) - (2n+1) \\ &= 2n + 6 - 2n - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Comme $\delta$ divise $\alpha$ et $\beta$, il divise $2\alpha - \beta$ c'est-à-dire 5 donc $\delta \in \{1; 5\}$.

(b) Démontrer que $\alpha$ et $\beta$ sont multiples de 5 si et seulement si $(n-2)$ est multiple de 5.

- Supposons que $\alpha$ et $\beta$ sont multiples de 5 alors $\beta - \alpha$ est aussi un multiple de 5.
  Or $\beta - \alpha = (2n+1) - (n+3) = n - 2$ donc $(n-2)$ est multiple de 5.
- Supposons maintenant que $(n-2)$ est multiple de 5 donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n - 2 = 5k$ donc $n = 5k + 2$
  Comme $\alpha = n + 3$ alors $\alpha = 5k + 2 + 3 = 5(k+1)$ ce qui prouve que α est un multiple de 5.
  Comme $\beta = 2n + 1$ alors $\beta = 2(5k+2) + 1 = 5(2k+1)$ ce qui prouve que β est un multiple de 5.
- L'équivalence est donc démontrée par double implication.

**3.** On considère les nombres $a$ et $b$ définis par :

$$\begin{aligned} a &= n^3 + 2n^2 - 3n \\ b &= 2n^2 - n - 1 \end{aligned}$$

Montrer, après factorisation, que $a$ et $b$ sont des entiers naturels divisibles par $(n-1)$.

A l'aide de la division euclidienne pour *a* :

$$\begin{aligned} n^3 + 2n^2 - 3n &= n^2(n-1) + 3n^2 - 3n \\ &= n^2(n-1) + 3n(n-1) \\ &= (n-1)(n^2+3n) \end{aligned}$$

Une factorisation élémentaire pour *b* :

$$\begin{aligned} 2n^2 - n - 1 &= n(n-1) + n^2 - 1 \\ &= n(n-1) + (n+1)(n-1) \\ &= (n-1)(2n+1) \end{aligned}$$

$(n^2+3n)$ et $(2n+1)$ sont des entiers donc *a* et *b* sont divisibles par $(n-1)$

**4.** (a) On note $d$ le PGCD de $n(n+3)$ et de $(2n+1)$. Montrer que $\delta$ divise $d$, puis que $\delta = d$.

- $\delta$ divise $(n+3)$ et $(2n+1)$ car $\delta$ est leur PGCD, donc $\delta$ divise $n(n+3)$ et $(2n+1)$.
  Par conséquent, $\delta$ divise $d$ qui est le PGCD de $n(n+3)$ et $2n+1$.

- Mais on a vu que, à la question 1, que $n$ et $2n+1$ sont premiers entre eux, donc $n$ et $2n+1$ qu'un seul diviseur commun : 1. Par conséquent les diviseurs communs à $n(n+3)$ et $(2n+1)$ sont les mêmes que ceux communs à $(n+3)$ et $(2n+1)$ donc :
  $d = \text{PGCD}[n(n+3); 2n+1] = \text{PGCD}(n+3; 2n+1) = \delta$.

(b) En déduire le PGCD, $\Delta$, de $a$ et $b$ en fonction de $n$.

D'après la question 3 :

$$\begin{aligned} PGCD(a\,;b) &= PGCD\big((n-1)(n^2+3n)\,;\,(n-1)(2n+1)\big) \\ &= (n-1)\times PGCD\big((n^2+3n)\,;\,(2n+1)\big) \\ &= (n-1)\delta \end{aligned}$$

D'après la question 2)b),

$$\delta = PGCD(\alpha\,;\beta) = 5 \iff n-2 \equiv 0 \ mod\ 5 \quad \text{donc :}$$

- si $n \equiv 2$ mod 5, alors $\Delta = 5(n-1)$ ;
- si $n$ n'est pas congru à 2 modulo 5, alors $\Delta = n-1$.

(c) Application :

Déterminer $\Delta$ pour $n = 2001$ ;

Déterminer $\Delta$ pour $n = 2002$.

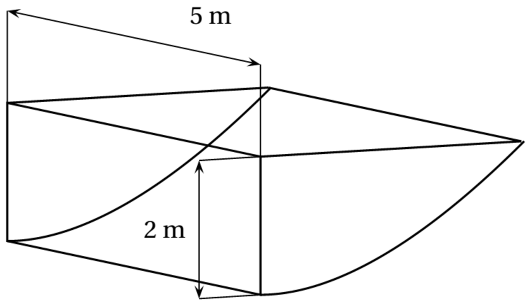
- Avec $n = 2001$ : $2001 \equiv 1$ mod 5, donc $\Delta = 2001 - 1 = 2000$.
- Avec $n = 2002$ : $2001 \equiv 2$ mod 5, donc $\Delta = 5\times 2001 = 10005$.

## *Exercice 2 (4 points) Amérique du nord Juin 2016*

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.
Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

- elle doit être située à deux mètres de sa maison;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres;
- elle doit mesurer cinq mètres de long;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

Cette cuve est schématisée ci-contre.

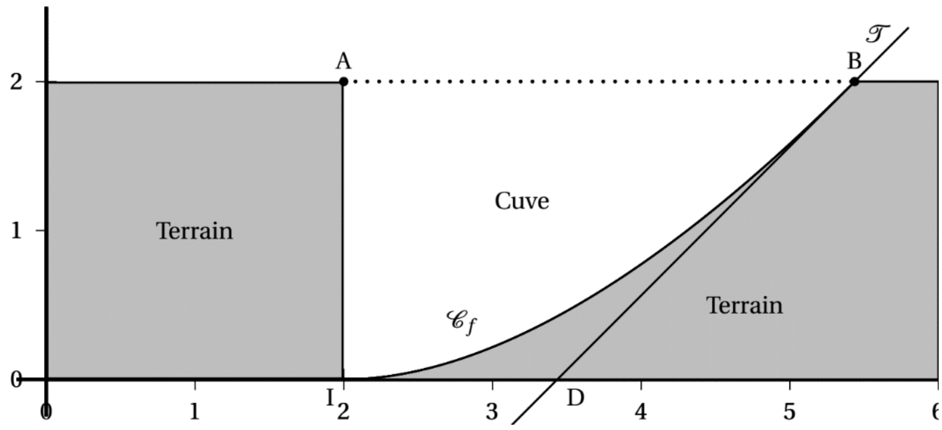



La partie incurvée est modélisée par la courbe $C_f$ de la fonction $f$ sur l'intervalle [2; 2e] définie par:

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

La courbe $C_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unité 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve.

On considère les points A(2 ; 2), I(2 ; 0) et B(2e ; 2).



## Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point I.

**Solution:** $f(x_B) = f(2\mathrm{e}) = 2\mathrm{e} \times \ln\left(\frac{2\mathrm{e}}{2}\right) - 2\mathrm{e} + 2 = 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e} + 2 = 2 = y_B$ donc $B \in \mathscr{C}_f$

$f(x_I) = f(2) = 2 \times \ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2 = 0 = y_I$ donc $I \in \mathscr{C}_f$

$f$ est dérivable sur $[2\,;\,2\mathrm{e}]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $[2\,;\,2\mathrm{e}]$

$$f = uv - u + 2 \Longrightarrow f' = u'v + uv' - u' \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$\forall x \in [2\,;\,2\mathrm{e}]$ , $f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ et on a $f'(2) = 0$ donc la tangente à $\mathscr{C}_f$ est horizontale en $I$

l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I

2. On note $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite $\mathcal{T}$ avec l'axe des abscisses.
   (a) Déterminer une équation de la droite $\mathcal{T}$ et en déduire les coordonnées de D.

**Solution:** $\mathscr{T}\ :\ y = f'(2\mathrm{e})(x - 2\mathrm{e}) + f(2\mathrm{e})$ or $f'(2\mathrm{e}) = 1$ et $f(2\mathrm{e}) = 2$

On a donc $\mathscr{T}\ :\ y = x + 2 - 2\mathrm{e}$ et on en déduit $D(2\mathrm{e} - 2\,;\,0)$

   (b) On appelle $S$ l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, les droites d'équations $y = 2, x = 2$ et $x = 2\mathrm{e}$.
   $S$ peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze AIDB.
   Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

**Solution:** $\mathscr{A}_{ABI} = \frac{1}{2} \times AB \times AI = (2\mathrm{e} - 2)m^2$

$$\mathscr{A}_{AIDB} = \frac{(AB + ID) \times AI}{2} = (4\mathrm{e} - 6)m^2$$

La longueur de la cuve étant de 5 $m$, on en déduit $10\mathrm{e} - 10 \leqslant V \leqslant 20\mathrm{e} - 30$

Autrement dit le volume de la cuve est compris entre 17,183 $m^3$ et 24,366 $m^3$

3. (a) Montrer que, sur l'intervalle $[2\,;\,2\mathrm{e}]$, la fonction $G$ définie par $G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$ est une primitive de la fonction $g$ définie par $g(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

**Solution:** $G$ est dérivable sur $[2\,;\,2\mathrm{e}]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $[2\,;\,2\mathrm{e}]$

$$G = uv - \frac{1}{2}u \Longrightarrow f' = u'v + uv' - \frac{1}{2}u' \text{ avec } \begin{cases} u(x) = \frac{x^2}{2} \\ v(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = x \\ v'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$\forall x \in [2\,;\,2\mathrm{e}]$ , $G'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x = g(x)$

Donc $G$ est bien une primitive de la fonction $g$ sur $[2\,;\,2\mathrm{e}]$

(b) En déduire une primitive $F$ de la fonction $f$ sur l'intervalle [2 ; 2e].

**Solution:** $f(x) = g(x) - x + 2$

donc $F(x) = G(x) - \frac{x^2}{2} + 2x = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3x^2}{4} + 2x$ est primitive de $f$ sur [2 ; 2e]

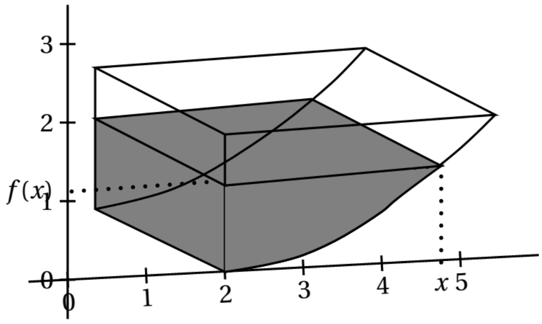
(c) Déterminer la valeur exacte de l'aire $S$ et en déduire une valeur approchée du volume $V$ de la cuve au $m^3$ près.

**Solution:** $S = \int_2^{2e} (2 - f(x))\, dx = \left[2x - F(x)\right]_2^{2e} = (4(e)F(2e)) - (4 - F(2)) = (e^2) - (3) = e^2 - 3$

$V = 5S \approx 22m^3$

**Partie B**

Pour tout réel $x$ compris entre 2 et 2e, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m$^3$, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.




On admet que, pour tout réel $x$ de l'intervalle [2 ; 2e],

$$v(x) = 5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right].$$

***1.*** Quel volume d'eau, au m$^3$ près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?

**Solution:** on cherche $x_0$ tel que $f(x_0) = 1$

On sait qu'il existe un unique $x_0$ vérifiant cette équation car $f$ est continue et strictement croissante sur [ ; 2e] à valeurs dans [0 ; 1] donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $x_0$ existe et est unique.

Par balayage on a $x_0 \approx 4{,}311$

$v(4{,}311) \approx 7m^3$

***2.*** On rappelle que $V$ est le volume total de la cuve, $f$ est la fonction définie en début d'exercice et $v$ la fonction définie dans la partie B.On considère l'algorithme ci-contre.

Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

| | |
|---|---|
| Variables : | $a$ est un réel |
| | $b$ est un réel |
| Traitement : | $a$ prend la valeur 2 |
| | $b$ prend la valeur 2 e |
| | Tant que $v(b) - v(a) > 10^{-3}$ faire : |
| |   $c$ prend la valeur $(a+b)/2$ |
| |   Si $v(c) < V/2$, alors : |
| |     $a$ prend la valeur c |
| |   Sinon |
| |     $b$ prend la valeur $c$ |
| |   Fin Si |
| | Fin Tant que |
| Sortie : | Afficher $f(c)$ |

**Solution:**

L'algorithme permet d'afficher la hauteur d'eau dans la cuve correspondant à $10^{-3}m^3$ près à un remplissage à moitié de la capacité totale.