Terminale S3	Évaluation de mathématiques n°5 Géométrie dans l'espace Durée 1h00	Vendredi 7 avril

<u>Exercice 1</u> (12 points)

Commun à tous les candidats

Pour chacune des six affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

On munit l'espace d'un repère orthonormé

<u>Partie A</u> – On considère les plans P_1 et P_2 d'équations respectives

$$x + y + z - 5 = 0 \quad \text{et} \quad 7x - 2y + z - 2 = 0.$$

Affirmation 1 : les plans P1 et P2 sont perpendiculaires.

Les plans P1 et P2 sont perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal à P1 et $\vec{m}\begin{pmatrix}7\\-2\\1\end{pmatrix}$ est normal à P2.

$$\vec{n}\cdot\vec{m} = 1\times 7 + 1\times(-2) + 1\times 1 = 6$$

Le produit scalaire est non nul donc les vecteurs ne sont pas orthogonaux et, par conséquent, les plans ne sont pas perpendiculaires.

L'affirmation est FAUSSE

Affirmation 2 : les plans P1 et P2 se coupent suivant la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = -3t + 4 \end{cases}$$

Notons (D) la droite dont une représentation paramétrique est donnée ci-dessus.

Les coordonnées de $\vec{n}$ et $\vec{m}$ ne sont pas proportionnelles car $\frac{1}{7} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{1}{1}$ donc ils ne sont pas colinéaires.

Par conséquent, les plans P1 et P2 ne sont pas parallèles et se coupent suivant une droite.

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un point quelconque de la droite (D) alors, $M\begin{pmatrix}t\\2t+1\\-3t+4\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

Le point M appartient-il à P1 et à P2 ?

$t + (2t + 1) + (-3t + 4) - 5 = 0$ donc M appartient à P1

$7t - 2(2t + 1) + (-3t + 4) - 2 = 7t - 4t - 3t - 2 + 4 - 2 = 0$ donc M appartient à P2.

Nous avons vérifié que tous les points de la droite se trouvent sur P1 et sur P2.

L'affirmation est VRAIE

Partie B –***Amérique du Sud Nov 2015***

Les points A, B, C sont définis par leurs coordonnées :

A(3 ; −1 ; 4), B(−1 ; 2 ; −3), C(4 ; −1 ; 2).

Le plan P a pour équation cartésienne : $2x - 3y + 2z - 7 = 0$.
La droite Δ a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 4 - t \\ z = -8 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 3 : Les droites Δ et (AC) sont orthogonales.

La droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et la droite (AC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\vec{v} \cdot \overrightarrow{AC} = 4\times1 + (-1)\times0 + 2\times(-2) = 4 - 4 = 0$ donc les vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux; on peut en déduire que les droites Δ et (AC) sont orthogonales.
L'affirmation est VRAIE

Affirmation 4 : Les points A, B et C déterminent un plan et ce plan a pour équation cartésienne

$$2x + 5y + z - 5 = 0.$$

Nommons (Q) le plan d'équation $2x + 5y + z - 5 = 0$.

- Les points A, B et C déterminent un plan si et seulement s'ils ne sont pas alignés.
  $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés; ils déterminent donc le plan (ABC).

- Le plan (ABC) a pour équation $2x + 5y + z - 5 = 0$ si les coordonnées des trois points A, B et C vérifient cette équation.
  $A \in (Q)$ car $2\times3 + 5\times(-1) + 4 - 5 = 0$
  $B \in (Q)$ car $2\times(-1) + 5\times2 + (-3) - 5 = 0$
  $C \in (Q)$ car $2\times4 + 5\times(-1) + 2 - 5 = 0$

Le plan (ABC) admet donc bien pour équation $2x + 5y + z - 5 = 0$.
L'affirmation est VRAIE

Affirmation 5 : Tous les points dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ sont données par

$$\begin{cases} x = 1 + s - 2s' \\ y = 1 - 2s + s' \\ z = 1 - 4s + 2s' \end{cases}, s \in \mathbb{R}, s' \in \mathbb{R} \text{ appartiennent au plan P}.$$

Soient s et s' deux réels et M le point de coordonnées $(1 + s - 2s'; 1 - 2s + s'; 1 - 4s + 2s')$.
Le plan P a pour équation $2x - 3y + 2z - 7 = 0$.

$$\begin{aligned} 2x_M - 3y_M + 2z_M - 7 &= 2(1 + s - 2s') - 3(1 - 2s + s') + 2(1 - 4s + 2s') - 7 \\ &= 2 + 2s - 4s' - 3 + 6s - 3s' + 2 - 8s + 4s' - 7 \\ &= -6 - 3s' \end{aligned}$$

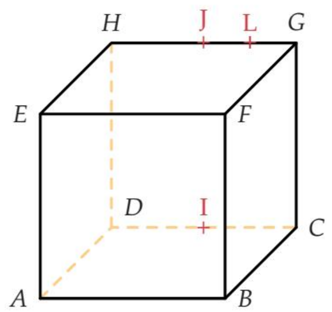
$-6 - 3s'$ n'est pas égal à 0 pour tout s'.
L'affirmation est FAUSSE

Affirmation 6 : Il existe un plan parallèle au plan P qui contient la droite Δ.

Il existe un plan parallèle au plan P qui contient la droite Δ si et seulement si la droite Δ est parallèle au plan P.
La droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{v}(4\ ;-1\ ;2)$. Le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}(2\ ;-3\ ;2)$.
La droite Δ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.
$\vec{v}\cdot\vec{n}=4\times2+(-1)\times(-3)+2\times2=15\neq0$ donc les deux vecteurs ne sont pas orthogonaux ce qui prouve que la droite Δ n'est pas parallèle au plan $\mathcal{P}$.
L'affirmation est FAUSSE

Exercice 2 (8 points)

Partie A : On considère le cube ABCDEFGH de côté a, avec I , J les milieux respectifs des segments [CD] et [GH] et L est le milieu du segment [GJ].



1) La droite (BI) est :
   a) orthogonale à (I J) b) orthogonale à (I L) c) orthogonale à (DG)

2) L'intersection du plan (BI L) avec le plan (ABF) est :
   a) une droite passant par le milieu de [AB]
   b) une droite passant par le point B
   c) une droite parallèle à (I L)

3) La section du cube ABCDEFGH par le plan (B I L) est :
   a) un triangle b) un parallélogramme c) un trapèze

Partie B : Dans un repère $(O\ ;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points
A(1 ; 0 ; 2) , B(2 ; 1 ; 2) , C(3 ; 0 ; 0) et D(5 ; −2 ; −4).

1) Les points A, B et C :
   a) sont alignés b) sont coplanaires c) définissent un plan

2) Soit E(3 ; 4 ; 5) :
   a) la droite parallèle à (AB) et passant par E a pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=t\\y=1+t\ ,t\in\mathbb{R}\\z=5\end{cases}$
   b) Le point E appartient au plan (ABC)
   c) les droites (AB) et (DE) sont non coplanaires