| | | |
|---|---|---|
| Terminale S3 | Devoir surveillé de mathématiques<br>Durée 2h | Lundi 24 avril |

**<u>Exercice 1 (10 points) Pondichéry Avril 2016</u>**

On souhaite stériliser une boîte de conserve.

Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25$°C et on la place dans un four à température constante $T_F = 100$  C.

La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85°C.

*Les deux parties de cet exercice sont indépendantes*

**Partie A : Modélisation discrète**

Pour $n$ entier naturel, on note $T_n$ la température en degré Celsius de la boîte au bout de $n$ minutes.

On a donc $T_0 = 25$.

Pour $n$ non nul, la valeur $T_n$ est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Initialisation : | $T$ prend la valeur 25 |
| Traitement : | Demander la valeur de $n$<br>Pour $i$ allant de 1 à $n$ faire<br>    $T$ prend la valeur $0,85 \times T + 15$<br>Fin Pour |
| Sortie : | Afficher $T$ |

***1.*** Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes.
Arrondir à l'unité.

***2.*** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, on a $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$.

***3.*** Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

**Partie B : Modélisation continue**

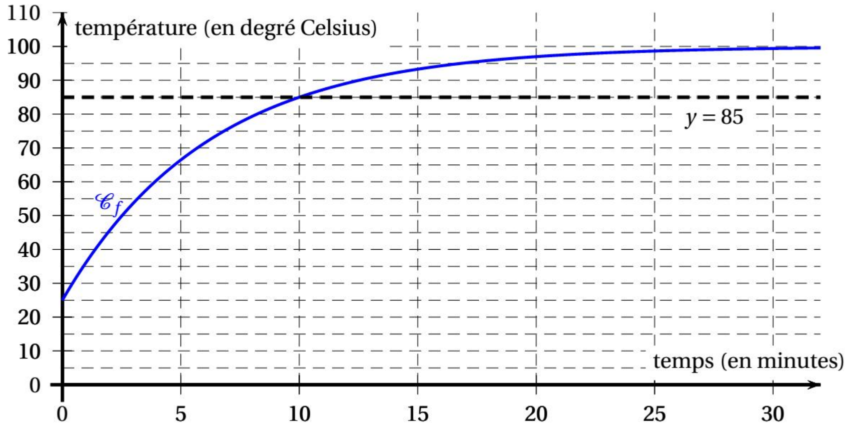
Dans cette partie, $t$ désigne un réel positif.

On suppose désormais qu'à l'instant $t$ (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec :

$$f(t) = 100 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}.$$

***1.*** (a) Étudier le sens de variations de $f$ sur $[0\,;+\infty[$.
(b) Justifier que si $t \geq 10$ alors $f(t) \geq 85$.

***2.*** Soit $\theta$ un réel supérieur ou égal à 10.
On note $\mathcal{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10, t = \theta,\ y = 85$ et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de $f$.
On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps $\theta$, si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathcal{A}(\theta)$ est supérieure à 80.



(a) Justifier, à l'aide du graphique donné ci-dessus, que l'on a $\mathcal{A}(25) > 80$.

(b) Justifier que, pour $\theta \geq 10$, on a $\mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\, \mathrm{d}t$.

(c) La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

**Exercice 2 (10 points) Centres Étrangers Juin 2016**

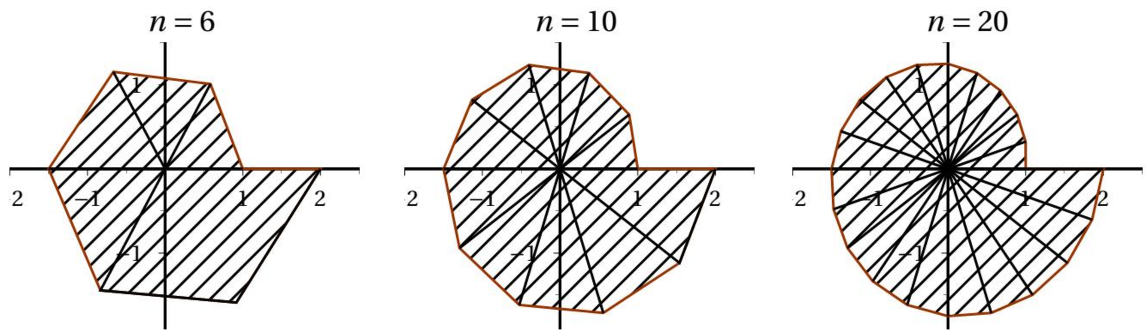
On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautile à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier $k$ allant de 0 à $n$, on définit les nombres complexes $z_k = \left(1 + \frac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ et on note $M_k$ le point d'affixe $z_k$.

Dans ce modèle, le pourtour du nautile est la ligne brisée reliant tous les points $M_k$ avec $0 \leq k \leq n$.

Par exemple, pour les entiers $n = 6$, $n = 10$ et $n = 20$, on obtient les figures ci-dessous.




**Partie A : Ligne brisée formée à partir de sept points**

Dans cette partie, on suppose que $n = 6$. Ainsi, pour $0 \leq k \leq 6$, on a $z_k = \left(1 + \frac{k}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{6}}$.

1. Déterminer la forme algébrique de $z_1$.
2. Vérifier que $z_0$ et $z_6$ sont des entiers que l'on déterminera.
3. Calculer la longueur de la hauteur issue de $M_1$ dans le triangle $OM_0M_1$ puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{7\sqrt{3}}{24}$.

**Partie B : Ligne brisée formée à partir de $n + 1$ points**

Dans cette partie, $n$ est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Pour tout entier $k$ tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer la longueur $OM_k$.
2. Pour $k$ entier tel que $0 \leq k \leq n - 1$, déterminer une mesure des angles $\left(\vec{u}; \overrightarrow{OM_k}\right)$ et $\left(\vec{u}; \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_k}; \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.
3. Pour $k$ entier tel que $0 \leq k \leq n - 1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de $M_{k+1}$ dans le triangle $OM_kM_{k+1}$ est égale à $\left(1 + \frac{k+1}{n}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.
4. On admet que l'aire du triangle $OM_kM_{k+1}$ est égale à $a_k = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k}{n}\right)\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$ et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$.
   L'algorithme suivant permet de calculer l'aire $A_n$ lorsqu'on entre l'entier $n$ :

| | |
|---|---|
| VARIABLES | $A$ est un nombre réel |
| | $k$ est un entier |
| | $n$ est un entier |
| TRAITEMENT | Lire la valeur de $n$ |
| | $A$ prend la valeur 0 |
| | Pour $k$ allant de 0 à n-1 |
| | $A$ prend la valeur $A+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$ |
| | Fin Pour |
| SORTIE | Afficher $A$ |

On entre dans l'algorithme $n = 10$

Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 0,323 | 0,711 | 1,170 | 1,705 | 2,322 | 3,027 | 3,826 | 4,726 | | |

**5.** On admet que $A_2 = 0$ et que la suite $(A_n)$ converge et que $\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{7\pi}{3} \approx 7{,}3$.

Recopier et compléter les lignes $L6$ et $L13$ de l'algorithme ci-après qui permet de déterminer le plus petit entier $n$ tel que $A_n \geq 7{,}2$. On ne demande pas de déterminer $n$.

$L1$ VARIABLES : $A$ est un nombre réel<br>
$L2$ $k$ est un entier<br>
$L3$ $n$ est un entier<br>
$L4$ TRAITEMENT : $n$ prend la valeur 2<br>
$L5$ $A$ prend la valeur 0<br>
**L6** **Tant que**............<br>
$L7$ $n$ prend la valeur $n+1$<br>
$L8$ $A$ prend la valeur 0<br>
$L9$ Pour $k$ allant de 0 à $n-1$<br>
$L10$ $A$ prend la valeur<br>
$A+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$<br>
Fin Pour<br>
$L12$ Fin Tant que<br>
**L13** **SORTIE :** **Afficher** ...

## Question BONUS

Démontrer la propriété suivante :

Dans un repère orthonormal, la distance du point A de coordonnées ( α ; β ; γ ) au plan *P* d'équation $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ est égale à $\frac{|a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

*Indication* : A' ( α'; β' ; γ' ) le projeté orthogonal du point A sur le plan *P*