Terminale S3	Devoir surveillé de mathématiques Durée 2h	Lundi 24 avril

Exercice 1 (10 points) Pondichéry Avril 2016

On souhaite stériliser une boîte de conserve.

Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25$°C et on la place dans un four à température constante $T_F = 100$ C.

La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85°C.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes.

On a donc $T_0 = 25$.

Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0,85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes. Arrondir à l'unité.

On cherche T_3:

$$T_1 = 0,85 \times T_0 + 15 = 36,25;$$
$$T_2 = 0,85 \times T_1 + 15 = 45,8125;$$
$$T_3 = 0,85 \times T_2 + 15 = 53,940625$$

La température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes est approximativement de 54°C.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété: $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.

- Pour $n = 0$: $100 - 75 \times 0,85^0 = 100 - 75 \times 1 = 25 = T_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- On suppose la propriété vraie au rang $p \geq 0$, c'est-à -dire $T_p = 100 - 75 \times 0,85^p$.

  D'après l'algorithme, on peut dire que, pour tout $n \geq 0$, $T_{n+1} = 0,85 \times T_n + 15$.

  Donc

  $$T_{p+1} = 0,85(100 - 75 \times 0,85^p) + 15 = 85 - 75 \times 0,85^{p+1} + 15 = 100 - 75 \times 0,85^{p+1}$$

  La propriété est donc vraie au rang $p + 1$.
- La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $p \geq 0$; elle est donc vraie pour tout $n \geq 0$.

Pour tout entier naturel n, $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.

3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

La stérilisation débute dès que la température est supérieure à 85°C, donc on cherche n tel que $T_n > 85$:

$$\begin{array}{lll} T_n > 85 & 100 - 75 \times 0,85^n > 85 & \\ & 15 > 75 \times 0,85^n & \\ & 0,2 > 0,85^n & \\ & \ln 0,2 > \ln(0,85^n) & \text{croissance de la fonction ln} \\ & \ln 0,2 > n \times \ln 0,85 & \text{propriété de la fonction ln} \\ & \dfrac{\ln 0,2}{\ln 0,85} < n & \text{car } \ln 0,85 < 0 \end{array}$$

Or $\frac{\ln 0,2}{\ln 0,85} \approx 9,9$ donc la stérilisation débute au bout de 10 minutes.

Partie B : Modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif.

On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec :

$$f(t)=100-75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}.$$

1. (a) Étudier le sens de variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(t)=-75\times\left(-\frac{\ln 5}{10}\right)e^{-\frac{\ln 5}{10}t}=7{,}5\times\ln 5\,e^{-\frac{\ln 5}{10}t}>0$ car $\mathrm{e}^{x}>0$ pour tout réel x.

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

(b) Justifier que si $t\geq 10$ alors $f(t)\geq 85$.

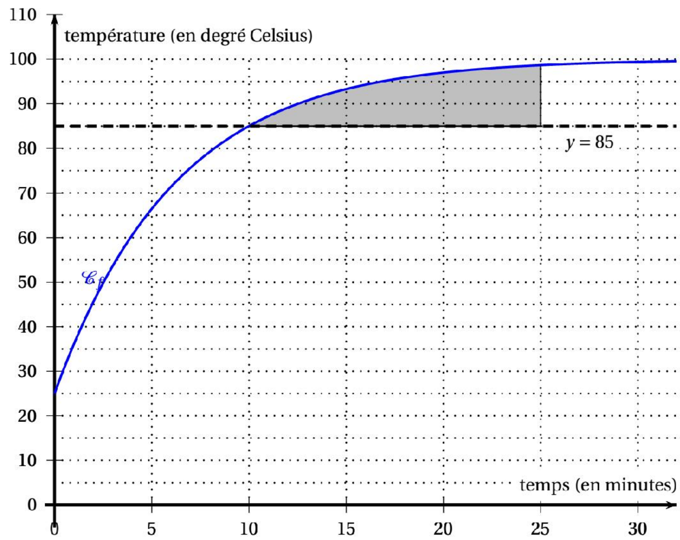
$$f(10)=100-75\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}\times 10}=100-75\,\mathrm{e}^{-\ln 5}=100-\frac{75}{\mathrm{e}^{\ln 5}}=100-\frac{75}{5}=85$$

Or la fonction f est strictement croissante donc si $x\geq 10$, alors $f(x)\geq f(10)$ ce qui veut dire que $f(x)\geq 85$.

2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.

On note $\mathcal{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t=10, t=\theta,\ y=85$ et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.

On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ, si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathcal{A}(\theta)$ est supérieure à 80



(a) Justifier, à l'aide du graphique donné ci-dessus, que l'on a $\mathcal{A}(25)>80$.

$A(25)$ est représentée en gris sur le graphique ci-dessus. Chaque rectangle correspond à 5×5 unités d'aire. En comptant les rectangles inclus dans la partie grisée, on en compte 3 entiers plus un demi, ce qui fait $3{,}5\times 25=87{,}5$ unités d'aire. Donc $\mathcal{A}(25)>80$.

(b) Justifier que, pour $\theta\geq 10$, on a $\mathcal{A}(\theta)=15(\theta-10)-75\int_{10}^{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t$.

$$A(\theta)=\int_{10}^{\theta}(f(t)-85)\mathrm{d}t=\int_{10}^{\theta}\left(\left(100-75\times e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right)-85\right)\mathrm{d}t=\int_{10}^{\theta}\left(15-75\times e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{10}^{\theta}15\mathrm{d}t-\int_{10}^{\theta}75\times e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\mathrm{d}t=15[t]_{10}^{\theta}-75\int_{10}^{\theta}e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\mathrm{d}t$$

$$=15(\theta-10)-75\int_{10}^{\theta}e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\mathrm{d}t$$

(c) La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

La stérilisation est finie au bout de 20 minutes si $\mathcal{A}(20) > 80$.

$$\mathcal{A}(20) = 15(20-10) - 75\int_{10}^{20} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t = 150 - 75\left[-\frac{10}{\ln 5}\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right]_{10}^{20}$$

$$= 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[\mathrm{e}^{-2\ln 5} - \mathrm{e}^{-\ln 5}\right] \quad = 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[\left(\mathrm{e}^{-\ln 5}\right)^2 - \mathrm{e}^{-\ln 5}\right]$$

$$= 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}\right] = 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[\frac{1}{25} - \frac{1}{5}\right] \quad = 150 + \frac{750}{\ln 5}\times\frac{-4}{25}$$

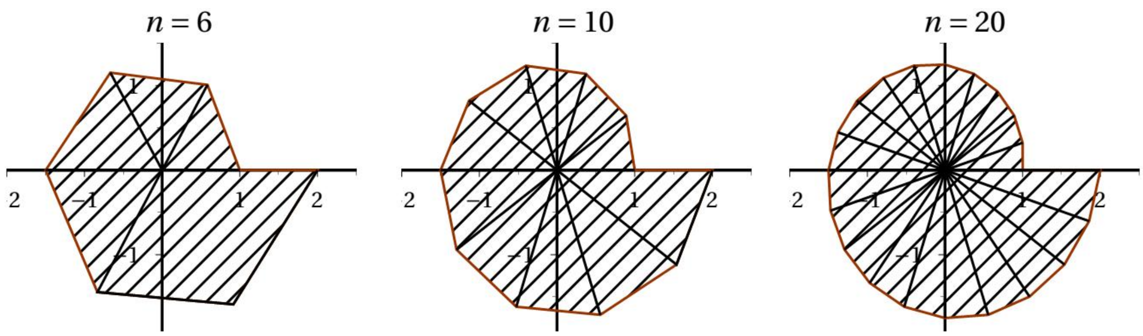
$$= 150 - \frac{120}{\ln 5} \approx 75{,}44 < 80$$

Donc la stérilisation n'est pas finie au bout de 20 minutes.

Exercice 2 (10 points) Centres Étrangers Juin 2016

On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautile à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k allant de 0 à n, on définit les nombres complexes $z_k = \left(1+\frac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ et on note M_k le point d'affixe z_k.
Dans ce modèle, le pourtour du nautile est la ligne brisée reliant tous les points M_k avec $0 \le k \le n$.
Par exemple, pour les entiers $n = 6$, $n = 10$ et $n = 20$, on obtient les figures ci-dessous.



Partie A : Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que $n = 6$. Ainsi, pour $0 \le k \le 6$, on a $z_k = \left(1+\frac{k}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{6}}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.

$$z_1 = \left(1+\frac{1}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{6}} = \frac{7}{6}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{7}{6}\times\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{7}{12}+\mathrm{i}\frac{7\sqrt{3}}{12}:$$

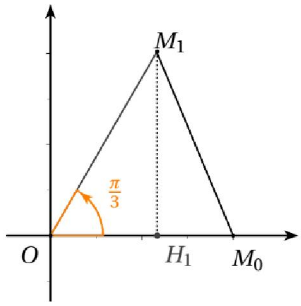
$$z_1 = \frac{7}{12}+\mathrm{i}\frac{7\sqrt{3}}{12}$$

2. Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera.

$$z_0 = \left(1+\frac{0}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\times 0\times\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0} = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0 = 1 \text{ donc } z_0 = 1$$

$$z_6 = \left(1+\frac{6}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\times 6\times\pi}{6}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 2\pi} = 2(\cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi) = 2 \text{ donc } z_6 = 2$$

3. Calculer la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{7\sqrt{3}}{24}$.



Soit H_1 le pied de la hauteur du triangle OM_0M_1 issue de M_1.
Dans le triangle rectangle OM_1H_1, on a $\sin\widehat{M_0OM_1} = \frac{H_1M_1}{OM_1}$, soit $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{H_1M_1}{\frac{7}{6}}$

On en déduit : $H_1M_1 = \frac{7}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{12}$

L'aire du triangle OM_0M_1 est alors égale, en u.a, à $\frac{OM_0\times H_1M_1}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$

Partie B : Ligne brisée formée à partir de $n+1$ points

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer la longueur OM_k.

$$OM_k = |z_{M_k}| = |z_k| = \left|\left(1+\frac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right| = \left|1+\frac{k}{n}\right|\times\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right| = 1+\frac{k}{n}$$

2. Pour k entier tel que $0 \leq k \leq n-1$, déterminer une mesure des angles $(\vec{u};\overrightarrow{OM_k})$ et $(\vec{u};\overrightarrow{OM_{k+1}})$. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_k};\overrightarrow{OM_{k+1}})$.

Par hypothèse, on a : $z_k = \left(1+\frac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$.
Puisque $1+\frac{k}{n} > 0$, alors $\arg(z_k) = \frac{2k\pi}{n}\quad[2\pi]$.

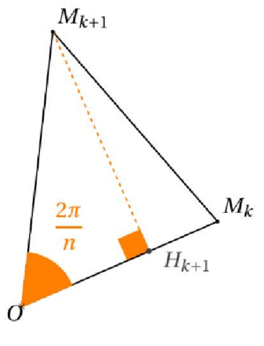
Par suite :

$$(\vec{u},\overrightarrow{OM_k}) = Arg\,(z_k) = \frac{2k\pi}{n}\quad[2\pi]$$
$$(\vec{u},\overrightarrow{OM_{k+1}}) = Arg\,(z_{k+1}) = \frac{2(k+1)\pi}{n}\quad[2\pi]$$
$$(\overrightarrow{OM_k},\overrightarrow{OM_{k+1}}) = (\overrightarrow{OM_k},\vec{u}) + (\vec{u},\overrightarrow{OM_{k+1}}) = -(\vec{u},\overrightarrow{OM_k}) + (\vec{u},\overrightarrow{OM_{k+1}}) = -\frac{2k\pi}{n}+\frac{2(k+1)\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}\quad[2\pi].$$

3. Pour k entier tel que $0 \leq k \leq n-1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} est égale à $\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\times\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$, notons H_{k+1} le pied de la hauteur issue du point M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1}.

- Si $n = 2$, le triangle OM_0M_1 est plat : on a alors $M_1H_1 = 0$
- Supposons $n \geq 3$:
  Le point H_k appartient alors au segment $[OM_k]$ *sauf si* $n = 3$.
  Dans les deux cas, on a $\left|\sin(\overrightarrow{OH_{k+1}},\overrightarrow{OM_{k+1}})\right| = \left|\sin(\overrightarrow{OM_k},\overrightarrow{OM_{k+1}}) = \frac{2\pi}{n}\right| = \sin\frac{2\pi}{n}$
  Par suite : $\sin\widehat{H_{k+1}OM_{k+1}} = \frac{M_{k+1}H_{k+1}}{OM_{k+1}} = \frac{M_{k+1}H_{k+1}}{1+\frac{k+1}{n}}$
  Puis : $M_{k+1}H_{k+1} = \left(1+\frac{k+1}{n}\right)\times\sin\frac{2\pi}{n}\quad[2\pi]$



4. On admet que l'aire du triangle OM_kM_{k+1} est égale à $a_k = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$ et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$.
L'algorithme suivant permet de calculer l'aire A_n lorsqu'on entre l'entier n :

```
VARIABLES       A est un nombre réel
                k est un entier
                n est un entier
TRAITEMENT      Lire la valeur de n
                A prend la valeur 0
                Pour k allant de 0 à n-1
                    A prend la valeur A + 1/2 sin(2π/n) × (1 + k/n)(1 + (k+1)/n)
                Fin Pour
SORTIE          Afficher A
```

On entre dans l'algorithme $n = 10$
Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme.

$$4{,}726\ \left(\frac{1}{2}\right) sin\left(\frac{2\pi}{10}\right) + \left(1+\frac{8}{10}\right)\left(1+\frac{9}{10}\right) \approx 4{,}809$$
$$4{,}809\ \left(\frac{1}{2}\right) sin\left(\frac{2\pi}{10}\right) + \left(1+\frac{9}{10}\right)\left(1+\frac{10}{10}\right) \approx 5{,}213$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726	4,809	5,213

5. On admet que $A_2 = 0$ et que la suite (A_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \frac{7\pi}{3} \approx 7{,}3$.
Recopier et compléter les lignes $L6$ et $L13$ de l'algorithme ci-après qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $A_n \geq 7{,}2$. On ne demande pas de déterminer n.

```
L1    VARIABLES :     A est un nombre réel
L2                    k est un entier
L3                    n est un entier
L4    TRAITEMENT :    n prend la valeur 2
L5                    A prend la valeur 0
L6                    Tant que............
L7                        n prend la valeur n + 1
L8                        A prend la valeur 0
L9                        Pour k allant de 0 à n − 1
L10                           A prend la valeur
                              A + 1/2 sin(2π/n) × (1 + k/n)(1 + (k+1)/n)
                          Fin Pour
L12                   Fin Tant que
L13   SORTIE :        Afficher ...
```

Les deux lignes à compléter sont

L6: Tantque $A < 7{,}2$

et

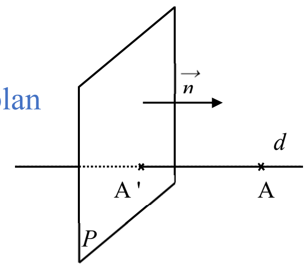
L13: Afficher n

Remarque : on obtient n = 20.

Question BONUS

Démontrer la propriété suivante :

Dans un repère orthonormal, la distance du point A de coordonnées (α ; β ; γ) au plan P d'équation $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ est égale à $\dfrac{|\,a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma + d\,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$



Indication : A' (α'; β' ; γ') le projeté orthogonal du point A sur le plan P

Comme A' (α'; β' ; γ') est le projeté orthogonal du point A sur le plan *P,* le vecteur $\overrightarrow{A'A}\begin{pmatrix}\alpha-\alpha'\\ \beta-\beta'\\ \gamma-\gamma'\end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ normal au plan P. Par conséquent, $\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{A'A}\right| = \|\vec{n}\|.\left\|\overrightarrow{A'A}\right\|$.

- D'une part :
$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A'A} &= a(\alpha-\alpha') + b(\beta-\beta') + c(\gamma-\gamma')\\ &= a\alpha + b\beta + c\gamma - (a\alpha' + b\beta' + c\gamma')\end{aligned}$$
Or le point A' appartient au plan P donc $a\alpha' + b\beta' + c\gamma' + d = 0$ d'où $d = -(a\alpha' + b\beta' + c\gamma')$.
On a alors, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{A'A} = a\alpha + b\beta + c\gamma + d$ et $\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{A'A}\right| = |a\alpha + b\beta + c\gamma + d|$

- D'autre part : $\|\vec{n}\|.\left\|\overrightarrow{A'A}\right\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\times A'A$

- Finalement :
$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{A'A}\right| = \|\vec{n}\|.\left\|\overrightarrow{A'A}\right\| \Leftrightarrow |a\alpha + b\beta + c\gamma + d| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\times A'A \Leftrightarrow A'A = \frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.