Corrigé du DM n°1

Exercice 1 (4 points)

1. Résoudre le système : $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 8a+4b+2c=3 \\ 9a+3b+c=5 \end{cases}$ Indiquer les étapes intermédiaires.

Résolvons le système par la méthode de substitution :

$$\begin{cases} a+b+c=0 & L_1 \\ 8a+4b+2c=3 & L_2 \\ 9a+3b+c=5 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 & L_1 \\ 8a+2b\ \ =5 & L_2-8L_1 \\ 6a+2b\ \ =3 & L_3-9L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c\ =0 & \\ 8a+2b\ \ =5 & \\ 2a\qquad =2 & L_2-L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3/2 \\ c=1/2 \end{cases}$$

2. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

a. Déterminer les réels a, b et c tels que la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ passe par les points : $A(1\,;0)$, $B\left(2\,;\frac{3}{2}\right)$ et $C(3\,;5)$.

La parabole passe par les points A, B et C, leurs coordonnées vérifient donc l'équation $y=ax^2+bx+c$, on obtient alors le système suivant :

$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=3/2 \\ 9a+3b+c=5 \end{cases}$ qui est équivalent au système du **1.** donc $a=1$ $b=-3/2$ et $c=1/2$.

b. Déterminer les coordonnées du sommet S de cette parabole.

Par définition une parabole admet une unique tangente horizontale au point correspondant au sommet S. Ceci se traduit par $f'(x_0)=0$ où x_0 est l'abscisse du point S et f' la fonction dérivée de la fonction f définie par $f(x)=x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$.

Donc, comme $f'(x)=2x-\frac{3}{2}$, $f'(x_0)=0$ si et seulement si $x_0=\frac{3}{4}$. On a alors $y_0=f(x_0)=-\frac{1}{16}$.

Finalement : $S\left(\frac{3}{4};\frac{-1}{16}\right)$.

Exercice 2

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$. (C) est la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (aucune construction n'est demandée dans cet exercice).

Partie A : Etude des propriétés de f.

1. Etablir la relation : $f(x)=-f(-x)$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f(-x)=\frac{4(-x)}{(-x)^2+1}=\frac{-4x}{x^2+1}=-\frac{4x}{x^2+1}=-f(x)$ donc $f(x)=-f(-x)$.

2. On considère les points M et M' de la courbe (C) de coordonnées respectives $(x\,;f(x))$ et $(-x\,;f(-x))$.

Etablir que l'origine O du repère est le milieu du segment [MM'].

Calculons les coordonnées du milieu I du segment [MM'].

$x_I=\frac{x_M+x_{M'}}{2}=\frac{x-x}{2}$ et $y_I=\frac{y_M+y_{M'}}{2}=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{f(x)-f(x)}{2}=0$ donc $I(0\,;0)$ ce qui signifie que $I=O$.

3. Que peut-on en déduire pour la courbe (C).

Les points M et M’ appartiennent à la courbe et sont symétriques par rapport à l’origine O du repère donc la courbe (C) est symétrique par rapport à O.

Partie B :

1. En détaillant les étapes du calcul, établir que la dérivée f' de f est définie par : $f'(x) = 4\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

La fonction f est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables et, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{4(x^2+1) - 4x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2+4-8x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2} = 4\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

2. Etudier sur $\mathbb{R}$ le signe de f'.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^2+1)^2 > 0$ donc f' a le même signe que $1-x^2$ or $1-x^2 = (1-x)(1+x)$, donc

- $f' > 0 \iff x \in]-1;1[$ et
- $f' \leq 0 \iff x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$

3. En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variations.

On peut en déduire que la fonction f est strictement croissante sur [-1 ; 1] et décroissante sur]-∞ ; -1] ainsi que sur [1 ; +∞[.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	

4. On considère la droite (Δ) d’équation $y = 4x$, montrer que cette droite (Δ) est la tangente à la courbe (C) au point de coordonnées $(0;0)$.

(Δ) admet pour équation, $y = f'(0)\times(x-0)+f(0)$ or $f'(0)=4$ et $f(0)=0$ donc (Δ) admet pour équation $y = 4x$.