Terminale S3	Évaluation de mathématiques n°1 Durée 55 mn	4 septembre 2017

Exercice 1 (5 points)

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Exercice 2 Asie Juin 2016 (15 points)

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante:

$u_0 = 1000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100$.

1. (a) Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé. On précisera en particulier ce que représente u_n.

(b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

(c) On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.
Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1000
	n prend la valeur 0
	Tant que .... faire
	  u prend la valeur ....
	  n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher ....

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1000$.
(b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante (une récurrence est possible mais pas indispensable !).

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.
(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
(b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.