| Terminale S3 | Évaluation de mathématiques n°1<br>Durée 55 mn | 4 septembre 2017 |
|---|---|---|

## *Exercice 1 (5 points)*

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Initialisation :

Pour $n = 1$ : $S_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ et $1 - \frac{1}{2^1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ donc la formule est vérifiée.

Hérédité

On suppose que pour $1 \leq k \leq n$, on a $S_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$

Peut on prouver que $S_{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$ ?

On a

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= S_k + \frac{1}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_k + \frac{1}{2^{k+1}} &= 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= 1 - \frac{2-1}{2^{k+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

On a montré que la propriété est héréditaire.

Conclusion : pour tout entier naturel $n$ non nul, $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

## Exercice 2 Extrait Asie Juin 2016 (15 points)

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite $(u_n)$ définie de la façon suivante:

$$u_0 = 1000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100.$$

**1.** (a) Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé. On précisera en particulier ce que représente $u_n$.

On appelle $u_n$ la masse, en gramme, des bactéries présentes dans la cuve, et $n$ représente le nombre de jours depuis le début du processus.
On a donc $u_0 = 1000$ puisqu'initialement, on introduit 1 kg soit 1000 grammes de bactéries.
Une augmentation de 20 % par jour se traduit par $u_n + 20\% \times u_n = u_n + 0{,}2u_n = 1{,}2\,u_n$ puis 100 g de bactéries sont perdus chaque jour ainsi : $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100$ avec $u_0 = 1000$.

(b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg soit 30000 g.
On cherche le plus petit entier $n$ tel que $u_n > 30000$.
À la calculatrice, on trouve $u_{22} \approx 28103$ et $u_{23} \approx 33624$; donc on dépasse 30 kg de bactéries à partir de 23 jours.

(c) On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.
Recopier et compléter cet algorithme.

| **Variables** | $u$ et $n$ sont des nombres |
|---|---|
| **Traitement** | $u$ prend la valeur 1000<br>$n$ prend la valeur 0<br>Tant que $u \leq 30000$ faire<br>    $u$ prend la valeur $1{,}2 \times u - 100$<br>    $n$ prend la valeur $n + 1$<br>Fin Tant que |
| **Sortie** | Afficher $n$ |

**2.** (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n \geq 1000$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n \geq 1000$.

- $u_0 = 1000 \geq 1000$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- On suppose la propriété vraie pour un rang $p \geq 0$, c'est-à -dire $u_p \geq 1000$.

  Montrons que $u_{p+1} \geq 1000$.

  $u_{p+1} = 1{,}2\, u_p - 100$ or $u_p \geq 1000$ donc $1{,}2\, u_p \geq 1200$ soit $1{,}2\, u_p - 100 \geq 1100$.

  Donc $1{,}2\, u_p - 100 \geq 1000$ et on a démontré que la propriété était vraie au rang $p + 1$.
- La propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$, donc elle est vraie pour tout $n \geq 0$.

  Pour tout $n$, $u_n \geq 1000$.

(b) Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante (une récurrence est possible mais pas indispensable !).

Pour tout $n$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1{,}2\, u_n - 100 - u_n \\ &= 0{,}2\, u_n - 100 \end{aligned}$$

Or, pour tout $n$, $u_n \geq 1000$ donc $0{,}2\, u_n \geq 200$ et donc $0{,}2\, u_n - 100 \geq 100$

On a donc démontré que, pour tout $n$, $u_{n+1} - u_n > 0$.

On peut donc dire que la suite $(u_n)$ est croissante.

**3.** On définit la suite $(v_n)$ par : pour tout entier naturel $n$, $v_n = u_n - 500$.

(a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 500 \\ &= 1{,}2\, u_n - 100 - 500 \\ &= 1{,}2 u_n - 600 = 1{,}2(u_n - 500) = 1{,}2 v_n \end{aligned}$$

$$v_0 = u_0 - 500 = 1000 - 500 = 500$$

Donc la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $q = 1{,}2$ et de premier terme $v_0 = 500$.

(b) Exprimer $v_n$, puis $u_n$, en fonction de $n$.

On déduit de la question précédente que, pour tout $n$, $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1,2^n$.

Comme, pour tout $n$, $u_n = v_n + 500$, on en déduit que $u_n = 500 + 500 \times 1,2^n$.

## Questions BONUS

Soit un entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1.

1) Démontrer que : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{10^k}=\frac{1}{90}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$.

$$S=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{10^k}=\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^{n+1}}$$

Cette somme $S$ comporte $n$ termes consécutifs de la suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de 1er terme $\frac{1}{10^2}$ donc :

$$S=\frac{1}{10^2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{100}\times\frac{1-\frac{1}{10^n}}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{90}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

2) La suite $v$ est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=1{,}277\ldots7$ avec $n$ décimales consécutives égales à 7.
A l'aide de la question 1), démontrer que la limite de la suite $v$ est un nombre rationnel $r$ c'est-à-dire le quotient de deux entiers.

$v_n=1{,}277\ldots7$

$=1{,}2+\frac{7}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\cdots+\frac{7}{10^{n+1}}$

$=1{,}2+7\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^{n+1}}\right)$

Or $\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{10^k}=\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^{n+1}}=\frac{1}{90}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$ donc :

$$v_n=1{,}2+7\times\frac{1}{90}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)=\frac{12}{10}+\frac{7}{90}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)=1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\frac{12}{10}+\frac{7}{90}=\frac{23}{18}$.

On a démontré que la limite de la suite $v$ est un nombre rationnel : $\frac{23}{18}$.