Exercice 1

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) dÉfinie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?
2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	l3	24 587	8 192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

1. Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.
2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a :$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{1}{n}$.
   Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Exercice 2

On pourra utiliser la propriété suivante : « Toute suite minorée et décroissante, converge » ainsi que le résultat suivant : « si $-1<q<1$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ *».*

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n : $u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.

2. ***a.*** Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n : $u_{n+1} = \dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1+0,5u}{0,5+u}$ Afficher u FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,0083	0,9973	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4. ***a.*** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Corrigé

On pourra utiliser la propriété suivante : « Toute suite minorée et décroissante, converge » ainsi que le résultat suivant : « si $-1 < q < 1$ *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ ».

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n : $u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n > 1$.

Initialisation : la relation est vraie au rang 0, en effet, $u_0 = 2 > 1$.

Hérédité : supposons qu'il existe un naturel p tel que $u_p > 1$, peut-on alors démontrer que $u_{p+1} > 1$.

$$u_{p+1} - 1 = \frac{1+3u_p}{3+u_p} - 1 = \frac{1+3u_p - 3 - u_p}{3+u_p} = \frac{2(u_p - 1)}{3+u_p}.$$

Par hypothèse de récurrence on a : $u_p > 1$ donc $u_p - 1 > 0$, de plus et $3 + u_p > 0$.

Finalement $\dfrac{u_p - 1}{3+u_p} > 0$, c'est-à -dire que $u_{p+1} = \dfrac{1+3u_p}{3+u_p} > 1$.

Conclusion : on a démontré par récurrence que quel que soit le naturel n, $u_n > 1$.

4. ***a.*** Établir que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

Quel que soit le naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \dfrac{1+3u_n - 3u_n - u_n^2}{3+u_n} = \dfrac{1-u_n^2}{3+u_n} = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). En déduire que la suite (u_n) converge.

On sait que quel que soit le naturel n, $u_n > 1 \iff 1 - u_n < 0$ et comme $3 + u_n > 0$, finalement $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge vers une limite supérieure ou égale à 1.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n : $u_{n+1} = \dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

5. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1+0,5u}{0,5+u}$ Afficher u FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u	0,800	1,077	0,976

6. Pour n = 12, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,0083	0,9973	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

Il semble que la suite converge vers 1 par valeurs alternativement supérieures et inférieures.

7. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

$v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \dfrac{\dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} - 1}{\dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} + 1} = \dfrac{0,5 - 0,5u_n}{1,5 + 1,5u_n} = \dfrac{-0,5(u_n - 1)}{1,5(u_n + 1)} = -\dfrac{1}{3}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

On a $v_0 = \dfrac{2-1}{2+3} = \dfrac{1}{3}$. On sait qu'alors pour tout naturel n, $v_n = \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

8. ***a.*** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

Quel que soit le naturel n, $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$,, 1, donc v_n ,, $\dfrac{1}{3}$ et par conséquent $v_n \neq 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

$v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} \Leftrightarrow v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \Leftrightarrow v_n u_n + v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow v_n u_n - u_n + = -1 - v_n \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -1 - v_n$

et comme $v_n \neq 1$, $u_n = \dfrac{-1 - v_n}{v_n - 1} = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Comme $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, donc d'après le résultat précédent

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{1} = 1$.