Durée : 3 heures.

SPECIALITE

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (7 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}/\{-2\}$ par $f(x) = \frac{6x+4}{x+2}$.

Partie A : Étude de la fonction f.

1) a) Calculer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.

   b) En déduire les variations de f sur son domaine de définition.

2) a) Montrer que f peut s'écrire sous la forme $f(x) = a + \frac{b}{x+2}$ où a et b sont deux réels à déterminer.

   b) En déduire que pour tout réel x positif, $f(x) \leq 6$.

3) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

   Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

Partie B : Étude de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{6n+4}{n+2}$

1) Déterminer les variations de la suite u.
2) Montrer que la suite u est bornée.
3) Montrer que la suite u converge puis déterminer sa limite.

Partie C : Étude de la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_{n+1} = \frac{6v_n+4}{v_n+2}$ et $v_0 = \frac{1}{2}$

On admet que, pour tout entier naturel n, la suite v est positive.

On donne en annexe une partie de la courbe représentative (C) de la fonction f ainsi que la droite (d) d'équation $y = x$.

1. a) Sur l'axe des abscisses, placer v_0 puis construire v_1, v_2 et v_3 en laissant apparents les traits de construction.
b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (v_n) ?

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $v_n - 5 < 0$.
b) Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1) b).

3. On suppose dans cette question que $v_0 \geq 5$. Quelles en sont les conséquences ?

Exercice 2 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Un point est attribué par réponse exacte justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

Proposition 1 :
Le nombre complexe $(1+i)^{2017}$ est un réel

Proposition 2 :
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{2} + 3i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = -4i$ ne sont pas alignés.

Proposition 3 :
Soit z un nombre complexe différent de 2.
Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $\frac{z-1}{z-2} = z$ admet deux solutions.

Proposition 4 :
Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z - \bar{z} + 2 - 4i = 0$ admet une solution unique.

Exercice 3 de Spécialité (4 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Justifier que $2^4 \equiv -1$ $(modulo\ 17)$.
Quel est le reste de la division par 17 du nombre 1532^{20} ?

Partie B

Soit n un entier naturel non nul.

On considère l'équation notée (E) $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

1) Montrer que $100 \equiv 2$ $(modulo\ 7)$.
   Démontrer que si $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) alors $3x^2 \equiv 2^n$ $(modulo\ 7)$.

2) Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7							

3) Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
   En déduire que l'équation (E) n'admet pas de solution.

Exercice 4 (5 points)

Dans un certain sport, on considère que 2 % des sportifs se dopent.

Un test anti-dopage répond aux spécificités suivantes :

- si un sportif se dope, le test est positif dans 99 % des cas ;
- si un sportif ne se dope pas, le test est négatif dans 99,9 % des cas.

1. Déterminer la probabilité qu'un sportif pris au hasard soit contrôlé positif avec ce test.

2. Si un sportif est contrôlé positif à ce test, on fait un deuxième test : si celui-ci est également positif, le sportif est déclaré coupable, sinon, il est innocenté.

On choisit un sportif subissant un contrôle antidopage et on considère les évènements :

- D : « le sportif est dopé » ;
- P1 : « le premier test est positif » ;
- P2 : « le deuxième test est positif ».

a. Montrer que la probabilité que le sportif soit déclaré coupable est 0,019 602 98 en admettant que $P_{D\cap P1}(P2) = P_D(P2)$ et $P_{\overline{D}\cap P1}(P2) = P_{\overline{D}}(P2)$.

b. Un officiel affirme :

« avec ce protocole, il est presque impossible qu'un sportif soit déclaré coupable à tort ».

Commenter cette affirmation.

3. On tire au sort 50 sportifs pratiquant ce sport, ce tirage au sort étant assimilable à un tirage au sort avec remise.

a. En moyenne, combien de ces sportifs seront déclarés coupables ?

b. Quelle est la probabilité qu'il y ait entre 2 et 10 déclarés coupables ?

4. Un test antidopage coûte 500 € à réaliser.

On considère la variable aléatoire X donnant le coût d'un contrôle antidopage (c'est-à-dire un ou deux tests).

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. La fédération de ce sport prévoit de réaliser 10 000 contrôles l'année prochaine.

Quelle somme « moyenne » devrait-elle prévoir pour tous ces contrôles dans son budget ?

<u>Annexe à compléter et à rendre avec la copie</u>

Nom :…………………..

Prénom :………………..

<u>Exercice 1</u>