Corrigé du DS n°1

Exercice 1 (7 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}/\{-2\}$ par $f(x) = \frac{6x+4}{x+2}$.

Partie A : Étude de la fonction f.

1) a) Calculer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.

La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition en tant que fonction rationnelle et :

$$f'(x) = \frac{6 \times (x+2) - (6x+4) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{6x + 12 - 6x - 4}{(x+2)^2} = \frac{8}{(x+2)^2} > 0$$

b) En déduire les variations de f sur son domaine de définition.

Pour tout réel de $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-2[$ et sur $]-2\,;\,+\infty[$.

2) a) Montrer que f peut s'écrire sous la forme $f(x) = a + \frac{b}{x+2}$ où a et b sont deux réels à déterminer.

$a + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2)+b}{x+2} = \frac{ax+2a+b}{x+2}$ donc $\frac{6x+4}{x+2} = \frac{ax+2a+b}{x+2} \Leftrightarrow 6x + 4 = ax + 2a + b$ soit $a = 6$ et $2a + b = 4$
$a = 6$ et $b = 4 - 12 = -8$.
En conclusion, $f(x) = 6 - \frac{8}{x+2}$.

b) En déduire que pour tout réel x positif, $f(x) \leq 6$.

Comme $\frac{8}{x+2} > 0$ lorsque x est positif, on peut en déduire que $6 - \frac{8}{x+2} \leq 6$ c'est-à-dire que $f(x) \leq 6$.

3) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{6x+4}{x+2} = x \Leftrightarrow 6x + 4 = x(x+2) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 4 = 0$.
$x^2 - 4x - 4 = 0$ est une équation du second degré : $\Delta = 16 + 16 = 32 > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes qui sont $\frac{4-\sqrt{32}}{2} = \frac{4-4\sqrt{2}}{2} = 2 - 2\sqrt{2}$ et $2 + 2\sqrt{2}$.
L'équation $f(x) = x$ admet donc deux solutions : $2 - 2\sqrt{2}$ et $2 + 2\sqrt{2}$.
Résoudre l'équation $f(x) = x$ revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f avec la droite d'équation $y = x$.

Partie B : Étude de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{6n+4}{n+2}$

1) Déterminer les variations de la suite u.

On a $u_n = f(n)$ or f est croissante sur $]-2\,;\,+\infty[$ donc sur $[0\,;\,+\infty[$, par conséquent pour tout entier naturel n, $f(n+1) \geq f(n)$ soit $u_{n+1} \geq u_n$ ce qui signifie la suite u est croissante.

2) Montrer que la suite u est bornée.

La suite u est croissante donc minorée par son premier terme $u_0 = 2$.
D'après la partie A 2)b), on a $f(x) \leq 6$ or $u_n = f(n)$ par conséquent, $u_n \leq 6$.
On peut donc en déduire que, pour tout entier naturel n, $2 \leq u_n \leq 6$ donc la suite est bornée.

3) Montrer que la suite u converge puis déterminer sa limite.

u est une suite croissante majorée, donc elle converge.

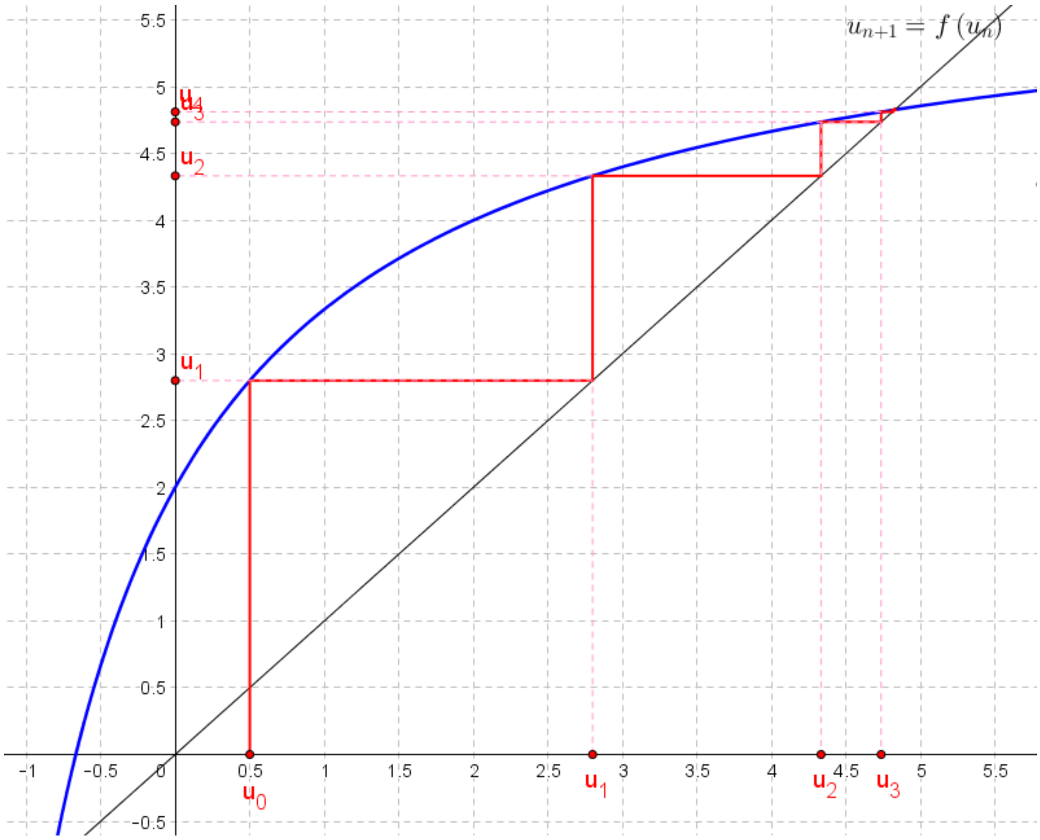
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{6n+4}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(6+\frac{4}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(6+\frac{4}{n}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)} = 6 \quad (par\ quotient)$$

Partie C : Étude de la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_{n+1} = \frac{6v_n+4}{v_n+2}$ et $v_0 = \frac{1}{2}$

On admet que, pour tout entier naturel n, la suite v est positive.

On donne en annexe une partie de la courbe représentative (C) de la fonction f ainsi que la droite (d) d'équation $y = x$.

1. a) Sur l'axe des abscisses, placer v_0 puis construire v_1, v_2 et v_3 en laissant apparents les traits de construction. (lire v et non u sur le graphique)



b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (v_n) ?

D'après le graphique la suite v semble croissante et converger vers une valeur comprise entre 4,5 et 5.

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $v_n - 5 < 0$.

Initialisation : $v_0 = \frac{1}{2}$ donc $v_0 - 5 = \frac{1}{2} - 5 = -4{,}5 < 0$ donc on a bien $v_0 - 5 < 0$;

Hérédité : On suppose que pour $0 \leq k \leq n$, on a $v_k - 5 < 0$.

Peut-on prouver dans ce cas que $v_{k+1} - 5 < 0$?

$v_{k+1} - 5 = \frac{6v_k+4}{v_k+2} - 5 = \frac{6v_k+4-5(v_k+2)}{v_k+2} = \frac{v_k-6}{v_k+2}$ or on sait que $v_k - 5 < 0$ donc $v_k - 5 - 1 < -1 < 0$.

De plus $v_k \geq 0$ pour tout k donc $v_k + 2 > 0$.

On peut donc en déduire que $\frac{v_k-6}{v_k+2} < 0$ c'est-à-dire que $v_{k+1} - 5 < 0$.

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : la propriété « $v_n - 5 < 0$ » est vraie pour tout entier naturel n.

b) Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1) b).

- Montrons dans un premier temps que la suite v est croissante, pour cela étudions le signe de $v_{n+1} - v_n$ ou (méthode plus rapide) en utilisant une récurrence pour montrer que $v_{n+1} > v_n$ en utilisant la fonction f.

Initialisation : $v_1 = \frac{6v_0+4}{v_0+2} = \frac{7}{\frac{5}{2}} = \frac{14}{5} > \frac{1}{2}$ donc on a bien $v_1 > v_0$.
Hérédité : Supposons que pour $0 \leq k \leq n$, on ait $v_{k+1} > v_k$.
Peut-on prouver dans ce cas que $v_{k+2} > v_{k+1}$?
Comme f est une fonction croissante pour tout nombre positif alors, si $v_{k+1} > v_k > 0$ on peut en déduire que $f(v_{k+1}) > f(v_k) > f(0)$ c'est-à-dire $v_{k+2} > v_{k+1} > 2 > 0$.
Ce qui montre l'hérédité.

Conclusion : la propriété « $v_{n+1} > v_n$ » est vraie pour tout entier naturel n donc la suite est croissante.

- Montrons maintenant que la suite converge vers une limite L à déterminer.

D'une part, d'après 2)a) la suite est majorée par 5 puisque $v_n < 5$.
D'autre part, d'après la question précédente la suite est croissante.
On peut donc en conclure que v converge vers une limite L qui vérifie $f(L) = L$ et $0 < L < 5$
D'après la question A)3) $L = 2 + 2\sqrt{2}$.

3. On suppose dans cette question que $v_0 \geq 5$. Quelles en sont les conséquences ?
Dans ce cas, la suite devient décroissante mais la convergence ne change pas.

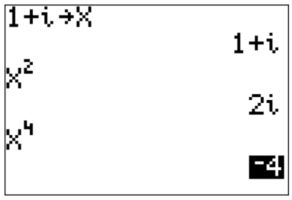
Exercice 2 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Un point est attribué par réponse exacte justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

Proposition 1 : FAUX

Le nombre complexe $(1+i)^{2017}$ est un réel

$(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$ donc $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$.
Par conséquent, $(1+i)^{2017} = (1+i)^{4\times 504+1} = (-4)^{504} \times (1+i)$.
$(-4)^{504} \in \mathbb{R}$ et $(1+i) \notin \mathbb{R}$ donc $(1+i)^{2017}$ n'est pas un réel.



Proposition 2 : VRAI

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{2} + 3i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = -4i$ ne sont pas alignés.

Étudions la colinéarité de deux vecteurs formés à l'aide de ces trois points (judicieusement choisis !).
$\overrightarrow{CA}(z_A - z_C)$ soit $\overrightarrow{CA}\left(\sqrt{2} + 7i\right)$ et $\overrightarrow{CB}(z_B - z_C)$ soit $\overrightarrow{CB}(1+5i)$.

<u>*Rappel :*</u> Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires lorsque qu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k \times \vec{v}$

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CA}\left(\sqrt{2}\,;\,7\right)$ et $\overrightarrow{CB}(1\,;5)$ ne sont pas proportionnelles (en effet : $\frac{\sqrt{2}}{1} \neq \frac{7}{5}$) donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, par conséquent les points ne sont pas alignés.

Proposition 3 : VRAI

Soit z un nombre complexe différent de 2.
Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $\frac{z-1}{z-2} = z$ admet deux solutions.

Pour tout $z \neq 2$,
$\frac{z-1}{z-2} = z \Leftrightarrow z(z-2) = z - 1 \Leftrightarrow z^2 - 3z + 1 = 0$: cette dernière équation est du second degré dans $\mathbb{C}$.
Le discriminant $\Delta = 9 - 4 = 5 > 0$ donc l'équation admet donc deux solutions réelles donc complexes.

Proposition 4 : FAUX

Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z - \bar{z} + 2 - 4i = 0$ admet une solution unique.

On a $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$ donc $z - \bar{z} = 2iy$ et $z - \bar{z} + 2 - 4i = 0 \Leftrightarrow 2iy + 2 - 4i = 0$
ou encore, sous forme algébrique : $2 + i(2y - 4) = 0$ ce qui est impossible puisque $2 \neq 0$.
Donc l'équation proposée n'admet pas de solution.

Exercice 3 de Spécialité (4 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Justifier que $2^4 \equiv -1$ $(modulo\ 17)$.
$2^4 = 16 = 1 \times 17 - 1$ donc $2^4 \equiv -1$ $(modulo\ 17)$

Quel est le reste de la division par 17 du nombre 1532^{20} ?
$1532 = 90 \times 17 + 2$ donc $1532 \equiv 2$ $[17]$.
Par conséquent, $1532^{20} \equiv 2^{20}$ $[17] \equiv (2^4)^5$ $[17] \equiv (-1)^5$ $[17] \equiv -1$ $[17] \equiv 16$ $[17]$.
Le reste de la division par 17 du nombre 1532^{20} est donc 16.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul.

On considère l'équation notée (E) $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

1) Montrer que $100 \equiv 2$ $(modulo\ 7)$.
   $100 = 14 \times 7 + 2$ donc $100 \equiv 2$ $(modulo\ 7)$.

   Démontrer que si $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) alors $3x^2 \equiv 2^n$ $(modulo\ 7)$.
   $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) alors $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ donc :
   $3x^2 + 7y^2 \equiv 10^{2n}$ $[7] \equiv 100^n$ $[7] \equiv 2^n$ $[7]$.
   Par conséquent, $3x^2 \equiv 2^n - 7y^2$ $[7] \equiv 2^n$ $[7]$ car $7y^2 \equiv 0$ $[7]$.

2) Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7	0	3	5	6	6	5	3

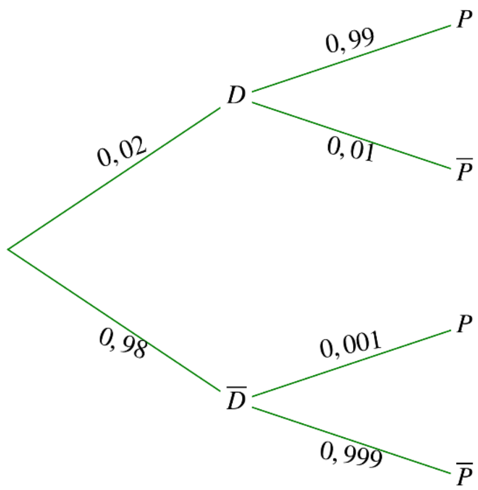
3) Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
   On remarque que :
   $2^0 = 1$ donc $2^0 \equiv 1$ $[7]$
   $2^1 = 2$ donc $2^1 \equiv 2$ $[7]$
   $2^2 = 4$ donc $2^2 \equiv 4$ $[7]$
   $2^3 = 8$ donc $2^3 \equiv 1$ $[7]$
   On peut en déduire que pour tout entier naturel k, $2^{3k} \equiv 1$ $[7]$, $2^{3k+1} \equiv 2[7]$, $2^{3k+2} \equiv 4[7]$ ce qui prouve bien que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.

   En déduire que l'équation (E) n'admet pas de solution.
   On sait que si $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) alors $3x^2 \equiv 2^n$ $(modulo\ 7)$, or d'après 2) et 3) ceci n'arrive jamais. Donc l'équation (E) n'admet pas de solution.

Exercice 4 (5 points)

Dans un certain sport, on considère que 2 % des sportifs se dopent.
Un test anti-dopage répond aux spécificités suivantes :

- si un sportif se dope, le test est positif dans 99 % des cas ;
- si un sportif ne se dope pas, le test est négatif dans 99,9 % des cas.



1. Déterminer la probabilité qu'un sportif pris au hasard soit contrôlé positif avec ce test.

Appelons P l'évènement « le test est positif » et D l'évènement « le sportif se dope ».

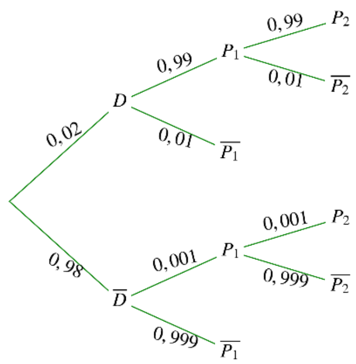
A l'aide de l'arbre ci-contre et de la formule des probabilités totales :

$$P(P) = 0{,}02 \times 0{,}99 + 0{,}98 \times 0{,}01 = 0{,}0296$$

2. Si un sportif est contrôlé positif à ce test, on fait un deuxième test : si celui-ci est également positif, le sportif est déclaré coupable, sinon, il est innocenté.
On choisit un sportif subissant un contrôle antidopage et on considère les évènements :

- D : « le sportif est dopé » ;
- P1 : « le premier test est positif » ;
- P2 : « le deuxième test est positif ».

a. Montrer que la probabilité que le sportif soit déclaré coupable est 0,019 602 98 en admettant que $P_{D\cap P1}(P2) = P_D(P2)$ et $P_{\overline{D}\cap P1}(P2) = P_{\overline{D}}(P2)$.



À l'aide de l'arbre ci-contre et de la formule des probabilités totales :

$$P(\text{ le sportif est coupable }) = 0{,}02 \times 0{,}99^2 + 0{,}98 \times 0{,}001^2$$
$$= 0{,}01960298$$

b. Un officiel affirme :
« avec ce protocole, il est presque impossible qu'un sportif soit déclaré coupable à tort ».
Commenter cette affirmation.

Il s'agit ici de déterminer $P_{\overline{D}}(P_1 \cap P_2)$, or celle-ci (toujours d'après l'arbre) est égale à $0{,}001^2 = 10^{-6}$.
L'affirmation est discutable puisqu'il existe tout de même une chance sur un million.

3. On tire au sort 50 sportifs pratiquant ce sport, ce tirage au sort étant assimilable à un tirage au sort avec remise.

L'expérience consiste en la répétition 50 fois de manière indépendante d'une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles : coupable avec une probabilité égale à 0,01960298 ou non coupable.
Soit Y la variable aléatoire correspondant au nombre de sportifs déclarés coupable sur les 50 tirés au sort.
Y suit alors une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}01960298$.

a. En moyenne, combien de ces sportifs seront déclarés coupables ?

Comme Y suit une $\mathcal{B}(50\,;0{,}01960298)$ alors $E(Y) = 50 \times 0{,}01960298 = 0{,}980149$ donc environ 1 sportif sera déclaré coupable en moyenne.

b. Quelle est la probabilité qu'il y ait entre 2 et 10 déclarés coupables ?

On cherche ici $P(2 \leq Y \leq 10)$.
$P(2 \leq Y \leq 10) = P(Y \leq 10) - P(Y < 2) = P(Y \leq 10) - P(Y \leq 1)$ ce qui permet d'obtenir le résultats à la calculatrice. On trouve environ 0,25686.

4. Un test antidopage coûte 500 € à réaliser.

On considère la variable aléatoire X donnant le coût d'un contrôle antidopage (c'est-à-dire un ou deux tests).

a. Donner la loi de probabilité de X.

X ne peut prendre que les valeurs 500 et 1000. D'après l'arbre de la question 2)a) :

$P(X = 500) = P(D \cap \overline{P}_1) + P(\overline{D} \cap \overline{P}_1) = 0{,}02 \times 0{,}01 + 0{,}98 \times 0{,}999 = 0{,}97922$ et

$P(X = 1000) = 1 - P(X = 500) = 1 - 0{,}97922 = 0{,}02078.$

b. La fédération de ce sport prévoit de réaliser 10 000 contrôles l'année prochaine.

Quelle somme « moyenne » devrait-elle prévoir pour tous ces contrôles dans son budget ?

$E(X) = 500 \times 0{,}97922 + 1000 \times 0{,}02078 = 510{,}39$ ce qui représente le prix moyen d'un contrôle.

Pour 10 000, il faudra prévoir $10\,000 \times 510{,}39 = 5\,103\,900$ €.