Exos Vacances Octobre

34 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2x^2+2x-3}{x^2}.$$

1 Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

2 **a.** Conjecturer la limite de f en $+\infty$.

b. Tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=2$.

3 **a.** Démontrer que pour tout $x>1$, $|f(x)-2|\leqslant\frac{2}{x}$.

b. Soit un réel $\epsilon>0$. Démontrer qu'il existe un réel A tel que pour tout $x\geqslant A$, $|f(x)-2|\leqslant\epsilon$.

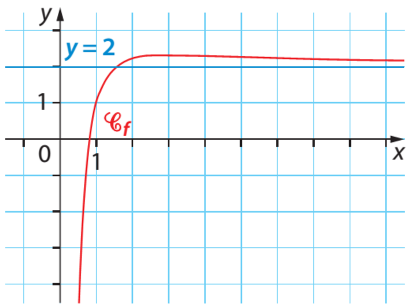
En déduire la limite de f en $+\infty$.

c. Que représente la droite $\mathscr{D}$ pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

Corrigé

34 **1** Pour $x\in\,]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\frac{6-2x}{x^3}$ qui est du signe de $6-2x$.

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{7}{3}$	↘	



2 **a.** Il semble que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

b. Voir ci-dessus.

3 **a.** Pour tout $x>1$, $|f(x)-2|=\frac{|2x-3|}{x^2}$.

◗ Si $x\geqslant\frac{3}{2}$: $|2x-3|=2x-3$. Donc $|2x-3|\leqslant 2x$, et

$|f(x)-2|\leqslant\frac{2x}{x^2}$, soit $|f(x)-2|\leqslant\frac{2}{x}$.

◗ Si $1<x\leqslant\frac{3}{2}$: $|2x-3|=3-2x$.

Donc $|f(x)-2|-\frac{2}{x}=\frac{3-2x}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{3-4x}{x^2}\leqslant 0$.

Donc $|f(x)-2|\leqslant\frac{2}{x}$.

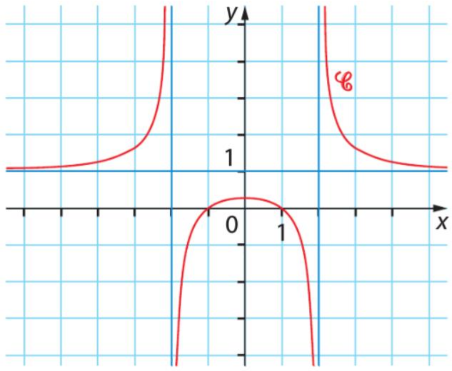
b. Soit un réel $\varepsilon>0$. Pour tout $x\geqslant\frac{2}{\varepsilon}$, $\frac{2}{x}\leqslant\varepsilon$;

donc $|f(x)-2|\leqslant\varepsilon$.

On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

c. La droite $\mathscr{D}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

45 Une fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\,;2\}$ est représentée ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}$.



On a tracé les asymptotes d'équations $x=-2$, $x=2$ et $y=1$.

Lire les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, en -2 (à droite et à gauche) et en 2 (à droite et à gauche).

Corrigé

45

◗ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

◗ $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=+\infty$;

◗ $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty$.

◗ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}} f(x)=-\infty$;

◗ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} f(x)=+\infty$.

◗ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

46 On donne le tableau de variations d'une fonction f, de courbe représentative $\mathscr{C}$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	3

1 Préciser les équations des asymptotes à $\mathscr{C}$.

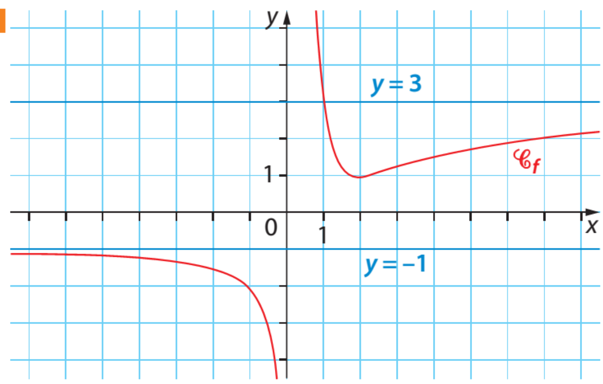
2 Tracer une allure possible de $\mathscr{C}$.

Corrigé

46 **1** Les asymptotes à $\mathscr{C}$ sont :

la droite d'équation $x=0$, la droite d'équation $y=-1$ en $-\infty$ et la droite d'équation $y=3$ en $+\infty$.

2



58 Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{x}{4-x^2}$; **b.** $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{x}{4-x^2}$; **c.** $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \dfrac{x}{4-x^2}$;

d. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \dfrac{x}{4-x^2}$; **e.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{4-x^2}$.

Corrigé

58 **a.** On a $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (4-x^2) = 0^+$; donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{x}{4-x^2} = +\infty$.

b. On a $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (4-x^2) = 0^-$; donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{x}{4-x^2} = -\infty$.

c. On a $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} (4-x^2) = 0^-$; donc $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \dfrac{x}{4-x^2} = +\infty$.

d. On a $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} (4-x^2) = 0^+$; donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{x}{4-x^2} = -\infty$.

e. Si x est différent de 0, $\dfrac{x}{4-x^2} = \dfrac{1}{-x\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)}$

comme $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1-\dfrac{4}{x^2}\right) = 1$, donc :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{4-x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{-x} = 0.$$

61 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1-3x}{x^2+x}$.

1 Tracer la courbe représentative de f à la calculatrice. Conjecturer la limite de f en 0 et en $+\infty$, ainsi que ses variations.

2 Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.

3 **a.** Calculer $f'(x)$.
b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
c. En déduire le tableau complet des variations de f.

Corrigé

61 **1** Il semble que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

2 ▶ $\lim\limits_{x\to 0} (1-3x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x^2+x) = 0^+$, donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

▶ Sur $]0\,;+\infty[$: $f(x) = \dfrac{1-3x}{x^2+x} = \dfrac{-3}{x} \times \dfrac{1-\dfrac{1}{3x}}{1+\dfrac{1}{x}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, par somme et produit :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$

▶ La courbe représentative de f admet deux asymptotes d'équations respectives $x = 0$ et $y = 0$.

3 ▶ $f'(x) = \dfrac{3x^2-2x-1}{(x^2+x)^2} = \dfrac{(3x+1)(x-1)}{(x^2-x)^2}$.

b. c. $f'(x)$ est du signe de $x-1$ sur $]0\,;+\infty[$, d'où le tableau de variations de f :

$\boldsymbol{x}$	0		1		$+\infty$
$\boldsymbol{f'(x)}$		$-$	0	$+$	
$\boldsymbol{f(x)}$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

72 Probabilités et suites

1 Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}.$$

a. Soit la suite (v_n) définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{5}\ ;$$

montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n.

2 On considère deux dés, notés A et B. Le dé A comporte trois faces rouges et trois faces blanches. Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches.
On choisit un dé au hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si on obtient blanc, on change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite.
On désigne par :

– A_n l'événement « on utilise le dé A au n-ième lancer » ;
– $\overline{A_n}$ l'événement contraire de A_n ;
– R_n l'événement « on obtient rouge au n-ième lancer » ;
– $\overline{R_n}$ l'événement contraire de R_n ;
– a_n et r_n les probabilités respectives de A_n et R_n.

a. Déterminer a_1.
b. Déterminer r_1. Pour cela, on pourra s'aider d'un arbre.
c. En remarquant que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n}),$$

montrer que : $\quad r_n = -\dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{2}{3}$.

d. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n}).$$

e. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3},$$

puis déterminer l'expression de a_n en fonction de n.
f. En déduire l'expression de r_n en fonction de n, puis la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$.

Corrigé

72 **1** **a.** $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{5}$
$= \frac{1}{6}\left(v_n + \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}v_n.$

La suite v est géométrique de raison $\frac{1}{6}$.

b. $v_n = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

et $u_n = v_n + \frac{2}{5} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}.$

2 **a.** $a_1 = \frac{1}{2}.$

b. $r_1 = \frac{7}{12}.$

c. $r_n = a_n \times \frac{1}{2} + (1 - a_n)\times\frac{2}{3} = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}.$

d. D'après la règle du jeu, on lance le dé A au lancer $(n+1)$ lorsque :

- on a utilisé le dé A au lancer n et obtenu le rouge : événement $A_n \cap R_n$;
- ou bien on a utilisé le dé B au lancer n et obtenu le blanc : événement $\overline{A_n} \cap \overline{R_n}$.

e. Ces deux événements étant disjoints la probabilité $p(A_{n+1})$ est égale à la somme de leurs probabilités. On obtient :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}(1 - a_n) = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}.$$

Avec **1**, on obtient pour tout entier naturel n :

$$a_n = u_n = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}.$$

f. $r_n = \frac{3}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n$; d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \frac{3}{5}.$

80 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^4 - 8z^3 + 26z^2 - 72z + 153 = 0.$$

Démontrer que les quatre points ayant pour affixe les solutions sont cocycliques.

Coup de pouce

a. On montrera d'abord que l'équation a deux solutions imaginaires pures.

b. On cherchera ensuite à factoriser le membre de gauche de l'équation sous la forme :

$(z^2 + 9)(z^2 + az + b)$ avec a et b réels.

Corrigé

80 On pose $z = iy$ avec y réel. iy est solution de (E) équivaut à $y^4 + 8iy^3 - 26y^2 - 72(iy) + 153 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - 26y^2 + 153 = 0 \\ 8iy(y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 153 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -3 \\ 81 - 234 + 153 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow y = -3$ ou $y = 3$.

L'équation a deux solutions imaginaires pures $3i$ et $-3i$.

En factorisant, on obtient l'équation équivalente : $(z^2 + 9)(z^2 - 8z + 17) = 0$.

L'équation équivaut à $z = -3i$ ou $z = 3i$ ou $z^2 - 8z + 17 = 0$.

Or, l'équation $z^2 - 8z + 17 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 64 - 68 = (2i)^2$, donc deux solutions complexes conjuguées $4 + i$ et $4 - i$.

$S = \{-3i ; 3i ; 4 + i ; 4 - i\}$.

Soient $A(-3i)$, $B(3i)$, $C(4 - i)$ et $D(4 + i)$.

La figure permet de conjecturer que l'affixe du centre K est 1. Comme K appartient à la médiatrice des segments $[AB]$ et $[CD]$, il ne reste plus qu'à calculer KA et KC qui valent tous les deux $\sqrt{10}$.

Les quatre points appartiennent au cercle de centre $K(1)$ et de rayon $\sqrt{10}$.