Durée : 4 heures.

SPECIALITE

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (7 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$$

On donne en annexe sa courbe représentative incomplète dans le plan muni d'un repère orthogonal.
On note C_f la courbe représentative de f.

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 3x - 4$$

1. Étudier les variations de la fonction g et déterminer les limites de g en + et $-\infty$.

En déduire le tableau des variations de g.

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ localisée dans l'intervalle $[1\ ;\ 3]$.

Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de α.

3. Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B : Étude de la fonction *f*

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.

Quelles interprétations graphiques peut-on faire de ces résultats ?

2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

3. En déduire le signe de f' puis le tableau de variation de la fonction f.

4. Soit M le point de C_f d'abscisse x et N le point de même abscisse que M appartenant à la droite D d'équation $y = x + 2$.

a) Montrer que $MN = h(x) = \left|\frac{x+2}{x^2-1}\right|$.

b) En déduire les limites à l'infini de la fonction h.

c) Quelle interprétation peut-on faire de ces résultats.

5. Sur le graphique donné en annexe, compléter la courbe C_f, tracer la droite D ainsi que les asymptotes éventuelles.

Exercice 2 de Spécialité (5 points)

1. ***a.*** Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.

   b. Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7\ [9]$.

2. ***a.*** Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $(10)^n \equiv 1\ [9]$.

   b. On désigne par *N* un entier naturel écrit en base dix, on appelle *S* la somme de ses chiffres.

   Démontrer la relation suivante : $N \equiv S\ [9]$.

   c. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

3. On suppose que $A = (2005)^{2005}$; on désigne par :
   - *B* la somme des chiffres de *A* ;
   - *C* la somme des chiffres de *B* ;
   - *D* la somme des chiffres de *C*.

   a. Démontrer la relation suivante : $A \equiv D\ [9]$.

   b. Sachant que $2005 < 10\ 000$, démontrer que *A* s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres.

   En déduire que $B < 72\ 180$.

   c. Démontrer que $C \leq 45$.

   d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de *D* plus petit que 15.

   Démontrer que *D* = 7.

Exercice 3 (3 points)

Chaque jour Bill doit décider s'il achète du pain ou non.

- S'il a acheté du pain un jour, la probabilité qu'il en achète le lendemain est 0,3 (parce qu'il lui en reste parfois du jour précédent ou qu'il n'en a simplement pas envie ce jour-là).
- S'il n'a pas acheté de pain un jour, la probabilité qu'il en achète le lendemain est 0,8.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle A_n l'évènement « Bill achète du pain le $n^{\text{ième}}$ jour » et on note $p_n = P(A_n)$.

Aujourd'hui (le 1^{er} jour), Bill a acheté du pain, ainsi $p_1 = 1$.

1. Calculer p_2 et p_3.
2. Représenter la situation par un arbre sur lequel figurent les évènements A_n, $\overline{A_n}$, A_{n+1} et $\overline{A_{n+1}}$.
3. Montrer que $p_{n+1} = 0{,}8 - 0{,}5p_n$.
4. Montrer par récurrence que $p_n = \frac{7}{15}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{8}{15}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. ***a.*** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

   b. Interpréter concrètement le résultat de la question précédente.

Exercice 4 (3 points)

Pour tout nombre complexe, z, on pose

$$f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$$

1. Démontrer que si z est solution de l'équation $f(z) = 0$, alors son conjugué $\bar{z}$ l'est aussi.
2. Soit $b \in \mathbb{R}$, exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaire de $f(bi)$.
3. En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux solutions imaginaires pures.
4. Démontrer qu'il existe deux nombres réels α et β que l'on déterminera, tels que pour tout nombre complexe z on ait :
$$f(z) = (z^2 + 9)(z^2 + \alpha z + \beta)$$
5. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

Exercice 5 (2 points)

1. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES	a, b sont deux nombres réels tels que $a < b$ x est un nombre réel f est une fonction définie sur l'intervalle $[a\,;\,b]$
TRAITEMENT	Lire a et b Tant que $b - a > 0,3$ x prend la valeur $\frac{a+b}{2}$ Si $f(x)f(a) > 0$, alors a prend la valeur x sinon b prend la valeur x Fin Si Fin Tant que Afficher $\frac{a+b}{2}$

Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse en justifiant votre choix.

Si l'on entre $a = 1$, $b = 2$ et $f(x) = x^2 - 3$, alors l'algorithme affiche en sortie le nombre 1,6875.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$ et $a_0 = 800$ et on donne l'algorithme suivant.

Variables	n est un entier naturel a est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur …. Affecter à a la valeur ….
Traitement	Tant que $a \leq$ … …, faire : Affecter à ... la valeur …… Affecter à ... la valeur……. Fin Tant que
Sortie	Afficher ...

   a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus pour qu'il détermine la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est strictement supérieur à 1200.
   b. Déterminer la valeur de n.

<u>Annexe à compléter et à rendre avec la copie</u>

Nom :…………………..

Prénom :………………..

Exercice 1