Exercice 1 (7 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ;\ 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$$

On donne en annexe sa courbe représentative incomplète dans le plan muni d'un repère orthogonal.
On note C_f la courbe représentative de f.

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 3x - 4$$

1. Étudier les variations de la fonction g et déterminer les limites de g en + et $-\infty$.
   En déduire le tableau des variations de g.

g est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

g' est une fonction polynôme du second degré qui admet deux racines 1 et -1, on peut donc en déduire :

- $g'(x) \geq 0$ sur $]-\infty ; -1] \cup [1 ;\ +\infty[$ donc g est strictement croissante sur $]-\infty ; -1]$ et $[1 ;\ +\infty[$.
- $g'(x) \leq 0$ sur $[-1 ; 1]$ donc g est strictement décroissante sur $[-1 ; 1]$.

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x - 4) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x - 4) = -\infty$.

On peut alors dresser le tableau des variations de g.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	$+\infty$

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ localisée dans l'intervalle $[1 ;\ 3]$.
   Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de α.

- Sur $]-\infty ; 1]$, g admet un maximum négatif donc $g(x) \leq -2 < 0$.
  Donc g ne s'annule pas sur cet intervalle.
- Sur $[1 ; 3]$: g est continue, strictement croissante et $g(1) = -6$ et $g(3) = 14$ donc $0 \in g([1 ; 3])$. On peut donc utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour affirmer que l'équation admet une unique solution sur $[1 ; 3]$.
- Sur $[3 ;\ +\infty[$, g est strictement croissante donc $g(x) \geq g(3)$ soit $g(x) \geq 14$ ainsi g ne s'annule pas sur $[3 ;\ +\infty[$.

Ces trois points démontrent que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ localisée dans l'intervalle $]1 ;\ 3[$.
À l'aide de la calculatrice, on trouve $2{,}195 < \alpha < 2{,}196$.

3. Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

D'après ce qui précède, on peut en déduire que :

- $g(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\alpha[$
- $g(\alpha) = 0$ avec $\alpha \approx 2{,}195$
- $g(x) > 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

PARTIE B : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.

Quelles interprétations graphiques peut-on faire de ces résultats ?

A l'infini :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et, de la même façon, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.

En $x = 1$:

$\lim\limits_{x\to1}(x^3+2x^2) = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x^2-1) = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$.

De même, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$.

En $x = -1$:

$\lim\limits_{x\to-1}(x^3+2x^2) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}(x^2-1) = 0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$.

De même, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = +\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \infty$, on peut en déduire que C_f admet 2 asymptotes verticales, l'une d'équation $x = 1$ et l'autre d'équation $x = -1$.

2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\,;\,1\}$: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$

La fonction f en tant que quotient de deux polynômes est dérivable sur son ensemble de définition et on a :

$$f'(x) = \frac{(3x^2+4x)(x^2-1)-(x^3+2x^2)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2} = \frac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

3. En déduire le signe de f' puis le tableau de variation de la fonction f.

On peut dresser un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	¦	$-$	¦	$-$	¦	$-$	0	$+$	
x		$-$	¦	$-$	0	$+$	¦	$+$	¦	$+$	
$(x^2-1)^2$		$+$	0	$+$	¦	$+$	0	$+$	¦	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Et en déduire le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$\alpha \approx 2,195$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha) \approx 5,3$	↗	$+\infty$

4. Soit M le point de C_f d'abscisse x et N le point de même abscisse que M appartenant à la droite D d'équation $y = x + 2$.

a) Montrer que $MN = h(x) = \left|\frac{x+2}{x^2-1}\right|$.

(MN) est parallèle à l'axe des ordonnées donc $MN = |y_M - y_N|$
Or $y_M = f(x_M)$, $y_N = x_N + 2$ et $x_M = x_N = x$ donc $MN = |y_M - y_N| = |f(x) - (x+2)|$.
On a $f(x) - (x+2) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1} - (x+2) = \frac{x^3+2x^2-(x+2)(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{x^3+2x^2-x^3+x-2x^2-2}{x^2-1} = \frac{x-2}{x^2-1}$.
Par conséquent, $MN = h(x) = \left|\frac{x+2}{x^2-1}\right|$.

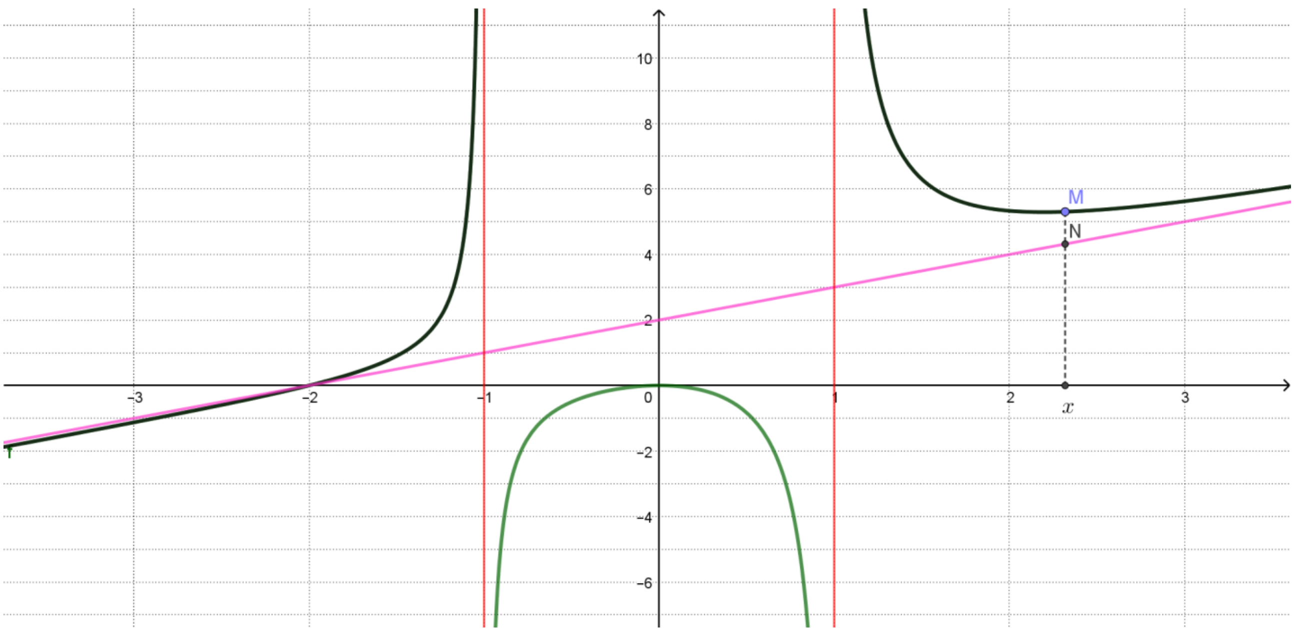
b) En déduire les limites à l'infini de la fonction h.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = 0$

c) Quelle interprétation peut-on faire de ces résultats.

On peut en déduire que pour des grandes valeurs de x (positives comme négatives), la courbe se rapproche de plus en plus de la droite D. On dit que D est asymptote oblique à la courbe C_f en $+$ et $-\infty$.

5. Sur le graphique donné en annexe, compléter la courbe C_f, tracer la droite D ainsi que les asymptotes éventuelles.



Exercice 2 de Spécialité (5 points)

1. ***a.*** Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.

$7^1 \equiv 7\ (9)$ $\quad 7^2 \equiv 4\ (9)$ $\quad 7^3 \equiv 1\ (9)$ donc $7^4 \equiv 7\ (9)$ $\quad 7^5 \equiv 4\ (9)$ ...
Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $7^{3k} \equiv 1\ (9)$, $7^{3k+1} \equiv 7\ (9)$ et $7^{3k+2} \equiv 4\ (9)$.
Dans la division euclidienne par 9 de 7^n, les restes possibles sont donc 1 , 4 et 7.

b. Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7\ [9]$.

$2005 = 9 \times 222 + 7 \equiv 7\ (9)$ donc $(2005)^{2005} \equiv 7^{2005}\ (9)$.
Or $2005 = 3 \times 668 + 1 \equiv 1\ (3)$ donc, d'après ***a***, $7^{2005} \equiv 7\ (9)$ donc $(2005)^{2005} \equiv 7\ (9)$.

2. ***a.*** Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $(10)^n \equiv 1\ [9]$.
$10 = 9\times1+1$ donc $10 \equiv 1(9)$ et $10^n \equiv 1^n\ (9)$ soit $10^n \equiv 1(9)$.

b. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres. Démontrer la relation suivante : $N \equiv S\ [9]$.

Soit a_n ; a_{n-1} ; ... ; a_1 ; a_0 les chiffres de l'entier naturel N écrit en base dix, avec $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$.
$N = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10 a_1 + a_0$ et $(10)^n \equiv 1\ [9]$, par conséquent,
$N \equiv a_n \times 1 + a_{n-1} \times 1 + \cdots + a_1 \times 1 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \equiv S\ (9)$.

c. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

N est divisible par 9 $\Leftrightarrow$ N $\equiv$ 0 (9) $\Leftrightarrow$ S $\equiv$ 0 (9) $\Leftrightarrow$ S est divisible par 9.

3. On suppose que $A = (2005)^{2005}$; on désigne par :
- B la somme des chiffres de A ;
- C la somme des chiffres de B ;
- D la somme des chiffres de C.

a. Démontrer la relation suivante : $A \equiv D\ [9]$.
D'après la question ***2.b*** , A ≡ B (9) , B ≡ C (9) et C ≡ D (9). Donc A ≡ D (9).

b. Sachant que $2005 < 10\,000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres.
En déduire que $B < 72\,180$.
$2005 < 10000$ donc $2005^{2005} < 10000^{2005}$ donc $A < 10^{4\times2005}$ soit $A < 10^{8020}$.
Ceci prouve que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres (et non 8021, car par exemple si $A < 10^3$ alors $A \leq 999$ et A s'écrirait donc avec au plus 3 chiffres).
Si chacun des chiffres de A était 9, B vaudrait 9 × 8020 = 72180. Donc B ≤ 72180.

c. Démontrer que $C \leq 45$.
Comme B ≤ 72180, alors B s'écrit en numération décimale avec au plus 5 chiffres.
Si chacun des chiffres de B était 9, C vaudrait 9×5 = 45. Donc C ≤ 45.

d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.
Démontrer que $D = 7$.
Parmi tous les entiers inférieurs ou égaux à 45, celui qui a la plus grande somme de ses chiffres est 39.
Donc D ≤ 12.
Comme A ≡ D (9) d'après la question ***3.a*** et A ≡ 7 (9) d'après la question ***1.b*** , alors D ≡ 7 (9).
Comme 0 < D ≤ 12, alors D = 7.

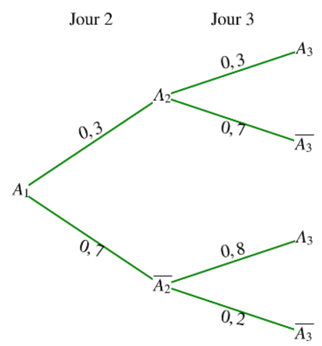
Exercice 3 (3 points)

Chaque jour Bill doit décider s'il achète du pain ou non.

- S'il a acheté du pain un jour, la probabilité qu'il en achète le lendemain est 0,3 (parce qu'il lui en reste parfois du jour précédent ou qu'il n'en a simplement pas envie ce jour-là).
- S'il n'a pas acheté de pain un jour, la probabilité qu'il en achète le lendemain est 0,8.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle A_n l'évènement « Bill achète du pain le $n^{\text{ième}}$ jour » et on note $p_n = P(A_n)$.
Aujourd'hui (le 1er jour), Bill a acheté du pain, ainsi $p_1 = 1$.

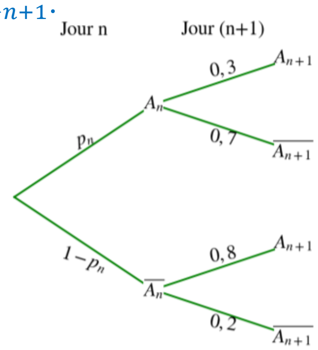
1. Calculer p_2 et p_3.



Comme il a acheté du pain le 1er jour, $p_2 = 0{,}3$ d'après l'énoncé.
Pour calculer p_3 on peut s'aider d'un arbre et utiliser la formule des probabilités totales. On obtient alors :

$$p_3 = P(A_3) = P(A_3 \cap A_2) + P(A_3 \cap \overline{A_2}) = 0{,}3 \times 0{,}3 + 0{,}8 \times 0{,}7 = 0{,}65.$$

2. Représenter la situation par un arbre sur lequel figurent les évènements A_n, $\overline{A_n}$, A_{n+1} et $\overline{A_{n+1}}$.



3. Montrer que $p_{n+1} = 0{,}8 - 0{,}5p_n$.

Toujours d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) \\ &= 0{,}3 \times p_n + 0{,}8 \times (1 - p_n) \\ &= 0{,}8 - 0{,}5p_n \end{aligned}$$

4. Montrer par récurrence que $p_n = \frac{7}{15}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{8}{15}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Initialisation :</u> on sait que $p_1 = 1$ et pour $n = 1$, $\frac{7}{15}\left(-\frac{1}{2}\right)^{1-1} + \frac{8}{15} = \frac{7}{15} + \frac{8}{15} = \frac{15}{15} = 1$

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

<u>Hérédité :</u> supposons que pour $1 \leq k \leq n$ on ait $p_k = \frac{7}{15}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{8}{15}$.

On sait que $p_{k+1} = 0{,}8 - \frac{1}{2}p_k$ donc :

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= 0{,}8 - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{15}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{8}{15}\right) \\ &= 0{,}8 + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{7}{15}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{8}{15}\right) \\ &= \frac{7}{15}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k} + \frac{8}{15} \end{aligned}$$

L'hérédité est démontrée.

<u>Conclusion :</u> $p_n = \frac{7}{15}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{8}{15}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. ***a.*** En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

Comme $-1 < -\frac{1}{2} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{8}{15}$.

b. Interpréter concrètement le résultat de la question précédente.

Au bout d'un nombre important de jours, la probabilité d'acheter du pain se stabilise autour de $\frac{8}{15} \approx 0{,}53$.

Exercice 4 (3 points)

Pour tout nombre complexe, z, on pose

$$f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$$

1. Démontrer que si z est solution de l'équation $f(z) = 0$, alors son conjugué $\bar{z}$ l'est aussi.

Si z est solution de l'équation $f(z) = 0$ montrons que $f(\bar{z}) = 0$.

$$\begin{aligned} f(\bar{z}) &= \bar{z}^4 - 10\bar{z}^3 + 38\bar{z}^2 - 90\bar{z} + 261 \\ &= \overline{z^4} - \overline{10z^3} + \overline{38z^2} - \overline{90z} + \overline{261} \\ &= \overline{z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261} = \overline{f(z)} \end{aligned}$$

Or $f(z) = 0$ donc $\overline{f(z)} = 0$ et, par conséquent $f(\bar{z}) = 0$ ce qui prouve que $\bar{z}$ est aussi solution.

2. Soit $b \in \mathbb{R}$, exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaire de $f(bi)$.

$$\begin{aligned} f(bi) &= (bi)^4 - 10(bi)^3 + 38(bi)^2 - 90(bi) + 261 \\ &= b^4 + 10ib^3 - 38b^2 - 90bi + 261 \\ &= (b^4 - 38b^2 + 261) + i(10b^3 - 90b) \end{aligned}$$

On peut donc en déduire que $\Re e\big(f(bi)\big) = b^4 - 38b^2 + 261$ et $\Im m\big(f(bi)\big) = 10b(b^2 - 9)$.

3. En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux solutions imaginaires pures.

$f(z) = 0$ admet deux solutions imaginaires pures si z s'écrit sous la forme $z = bi$ avec $b \in \mathbb{R}$ donc $f(bi) = 0$.

D'après la question précédente,

$$f(bi) = 0 \iff \begin{cases} b^4 - 38b^2 + 261 = 0 \\ 10b(b^2 - 9) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b^4 - 38b^2 + 261 = 0 \\ b = 0 \ \ ou \ \ b = 3 \ \ ou \ \ b = -3 \end{cases}.$$

0 n'est pas solution de la 1ère équation mais 3 et -3 le sont. Donc $f(bi) = 0 \iff b = 3 \ \ ou \ \ b = -3$.

Ainsi, $f(z) = 0$ admet deux solutions imaginaires pures : $z = 3i$ et $z = -3i$.

4. Démontrer qu'il existe deux nombres réels α et β que l'on déterminera, tels que pour tout nombre complexe z on ait : $f(z) = (z^2 + 9)(z^2 + \alpha z + \beta)$

$$\begin{aligned} (z^2 + 9)(z^2 + \alpha z + \beta) &= z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + 9z^2 + 9\alpha z + 9\beta \\ &= z^4 + \alpha z^3 + (\beta + 9)z^2 + 9\alpha z + 9\beta \end{aligned}$$

On a alors :

$$f(z) = (z^2 + 9)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

$$\iff z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261 = z^4 + \alpha z^3 + (\beta + 9)z^2 + 9\alpha z + 9\beta$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = -10 \\ \beta + 9 = 38 \\ 9\alpha = -90 \\ 9\beta = 261 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -10 \\ \beta = 29 \end{cases}$$

Conclusion : $f(z) = (z^2 + 9)(z^2 - 10z + 29)$

5. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $f\ (z) = 0$.

$$f\ (z) = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 9 = 0 \ \ ou \ \ z^2 - 10z + 29 = 0)$$

- On sait d'après la question 3 que $z = 3i$ et $z = -3i$ sont solutions de $f(z) = 0$ et de $z^2 + 9 = 0$.
- Résolution de $z^2 - 10z + 29 = 0$. C'est une équation du second degré à coefficients réels.

$$\Delta = 100 - 4 \times 1 \times 29 = -16 = (4i)^2$$

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{10+4i}{2} = 5 + 2i$ et $z_2 = 5 - 2i$.

L'équation $f(z) = 0$ admet donc 4 solutions distinctes : $\{3i\ ;\ -3i\ ; 5 + 2i\ ; 5 - 2i\}$.

Exercice 5 (2 points)

1. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES	a, b sont deux nombres réels tels que $a < b$ x est un nombre réel f est une fonction définie sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$
TRAITEMENT	Lire a et b Tant que $b - a > 0,3$ x prend la valeur $\frac{a+b}{2}$ Si $f(x)f(a) > 0$, alors a prend la valeur x sinon b prend la valeur x Fin Si Fin Tant que Afficher $\frac{a+b}{2}$

Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse en justifiant votre choix.

Si l'on entre $a = 1$, $b = 2$ et $f(x) = x^2 - 3$, alors l'algorithme affiche en sortie le nombre 1,6875.

	a	b	x
a reçoit la valeur 1	1		
b reçoit la valeur 2	1	2	
$b - a = 1 > 0,3$ donc on entre dans la boucle	1	2	
x prend la valeur $\frac{a+b}{2} = 1,5$	1	2	1,5
$f(a) = 1^2 - 3 = -2$	1	2	1,5
$f(x) = 1,5^2 - 3 = -0,75$	1	2	1,5
$f(x) \times f(a) > 0$ donc a prend la valeur $x = 1,5$	1,5	2	1,5
fin du tant que	1,5	2	1,5
$b - a = 0,5 > 0,3$ donc on entre dans la boucle	1,5	2	1,5
x prend la valeur $\frac{a+b}{2} = 1,75$	1,5	2	1,75
$f(a) = 1,5^2 - 3 = -0,75$	1,5	2	1,75
$f(x) = 1,75^2 - 3 = 0,0625$	1,5	2	1,75
$f(x) \times f(a) < 0$ donc b prend la valeur $x = 1,75$	1,5	1,75	1,75
fin du tant que	1,5	1,75	1,75
$b - a = 0,25 \leqslant 0,3$ donc on n'entre pas dans la boucle	1,5	1,75	1,75
On affiche $\frac{a+b}{2} = \frac{1,5+1,75}{2} = 1,625$	1,5	1,75	1,75

Donc l'affirmation est **fausse**.

On peut réaliser le programme sur la calculatrice :

```
PROGRAM:NEW
:Prompt A,B
:While B-A>0.3
:(A+B)/2→X
:If (X²-3)*(A²-3
)>0
:Then
:X→A
```

```
PROGRAM:NEW
:Then
:X→A
:Else
:X→B
:End
:End
:Disp (A+B)/2
```

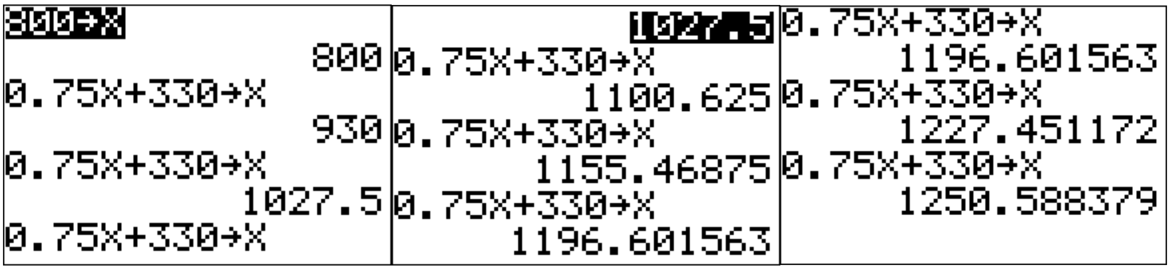
```
prgmNEW

A=?1
B=?2
                1.625
                 Done
```

2. Pour tout entier naturel n, on pose $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$ et $a_0 = 800$ et on donne l'algorithme suivant.

a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus pour qu'il détermine la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est strictement supérieur à 1200.

Variables	n est un entier naturel a est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 0 Affecter à a la valeur 800
Traitement	Tant que $a \leq 1200$, faire : Affecter à a la valeur $0{,}75a + 330$ Affecter à n la valeur $n + 1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher n

b. Déterminer la valeur de n.



A l'aide de la calculatrice, on obtient $u_5 \approx 1196$ et $u_6 \approx 1227$ c'est donc $n = 6$.