Travaux de vacances

Nombres complexes

Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on appelle A le point d'affixe 1 et C le cercle de centre A et de rayon 1.
La figure sera réalisée sur une feuille quadrillée avec 4 cm pour unité graphique.

Partie A

On considère l'équation (E) : $z^2 - 2z + 2 = 0$, où z est un nombre complexe.
On appelle z_1 et z_2 les solutions de (E).

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
2. On appelle M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle C.

Partie B

On considère l'application f du plan complexe qui à tout point M d'affixe z distinct de A associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{2z-1}{2z-2}$.

1. Placer le point A et tracer le cercle sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que pour tout complexe z distinct de 1 on a $(z'-1)(z-1) = \dfrac{1}{2}$.
3. Montrer que pour tout point M distinct de A on a : $\begin{cases} AM \times AM' = \dfrac{1}{2} \\ M' \neq A \\ \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}\right) + \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM'}\right) = 0 + k(2\pi) \end{cases}$, où k est un entier relatif.
4. On considère le point P d'affixe $z_P = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$. Construire le point P.
5. En utilisant la question 3, expliquer comment construire le point P', image de P par f, et réaliser cette construction.
6. Soit un point M appartenant à la droite D d'équation $x = \dfrac{3}{4}$. Soit M' son image par f.
   - ***a.*** Montrer que le point M' appartient au cercle C' de centre O de rayon 1.
   - ***b.*** Tout point de C' a-t-il un antécédent par f ?

Etude de fonction – Fonction exponentielle

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.
4. (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\,;+\infty[$ une unique solution.

On note α cette solution.

(b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

(c) Démontrer que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.

2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\,;+\infty[$.

Partie C

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{e^x + 1}$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}\right)$.

La figure est donnée ci dessous.

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées $(x\,;f(x))$,

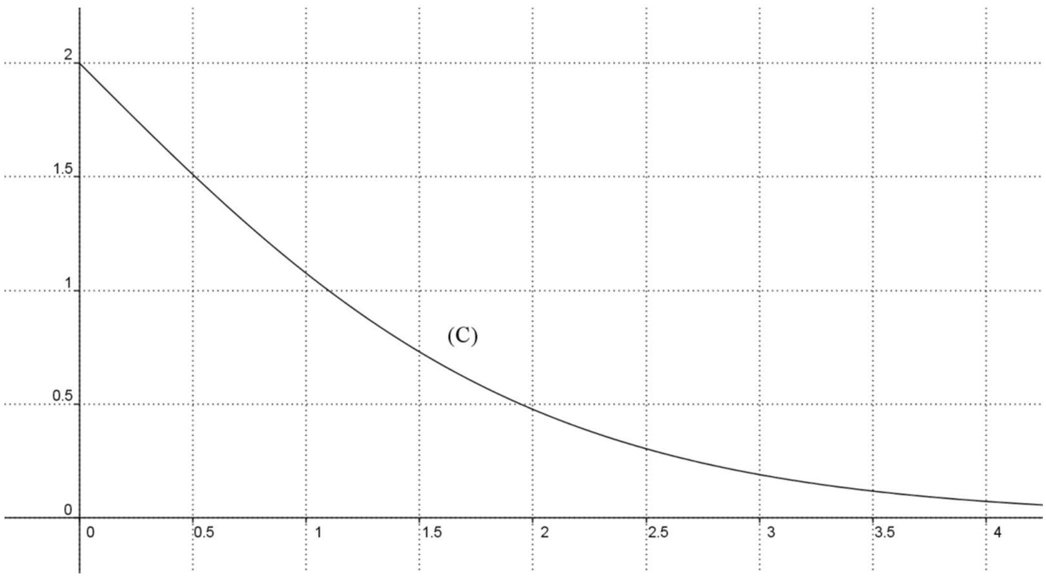
P le point de coordonnées $(x\,;0)$,

Q le point de coordonnées $(0\,;f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.

On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.

2. Le point M a pour abscisse α. La tangente (T) en M à la courbe $(\mathcal{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ? *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*



Probabilités conditionnelles

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :

M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;

T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2. Un animal est choisi au hasard.

a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?

b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?

5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,9405	0,0580	0,001 5

a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.

b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

Suites et algorithmes

Dans les questions suivantes, répondre par VRAI ou par FAUX.
Chaque réponse devra être soigneusement justifiée.

1. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$.

Affirmation 1.a	Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = 0$
Affirmation 1.b	Si (u_n) converge vers un réel non nul et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors la suite $(u_n \times v_n)$ ne converge pas
Affirmation 1.c	Si (u_n) converge vers un réel non nul, si (v_n) est positive et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ ne converge pas
Affirmation 1.d	Si (u_n) et (v_n) convergent alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge.

2. Voici un algorithme :

Variables :	n et p sont des entiers naturels d est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Initialisations :	Affecter à d la valeur 1. Affecter à n la valeur 0
Traitement :	Tant que $d > 10^{-p}$. | Affecter à d la valeur $0,5d^2$ | Affecter à n la valeur $n+1$.
Sortie :	Afficher n.

Affirmation 2.a		En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5
Affirmation 2.b		A la fin du traitement, d est toujours égal à 1

Méthode de Héron d'Alexandrie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

1. Justifiez que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et montrez que pour tout x de $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{2x^2}$$

En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^*$.

2. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = f(u_n)$

a. Calculer u_1, u_2 et u_3 vous donnerez les résultats sous la forme de fractions puis sous forme décimale arrondie à 10^{-5}.

b. Quelles conjectures pouvez-vous émettre quant à la monotonie et la convergence de la suite (u_n) ?

3. Démontrez que pour tout entier naturel $n, \sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq 2$ et conclure sur la convergence de la suite (u_n).

4. Démontrer que pour tout entier naturel $n, u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})$

5. En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 < u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{2})$$

6. Conclure sur la limite de la suite (u_n).