# Travaux de vacances - Correction

*Nombres complexes* *Nouvelle Calédonie – Nov 2012 (5 points)*

*Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment.*

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on appelle $A$ le point d'affixe 1 et C le cercle de centre $A$ et de rayon 1.

La figure sera réalisée sur une feuille quadrillée avec 4 cm pour unité graphique.

**Partie A**

On considère l'équation (E) : $z^2-2z+2=0$, où $z$ est un nombre complexe.

On appelle $z_1$ et $z_2$ les solutions de (E).

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

$z^2-2z+2=0$ ; $\Delta=(-2)^2-4\times1\times2=-4<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées,

$z_1=\dfrac{2+2i}{2}=1+i$ et $z_2=1-i$.

2. On appelle $M_1$ et $M_2$ les points d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$ dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Montrer que $M_1$ et $M_2$ appartiennent au cercle C.

Montrons que $AM_1=AM_2=1$.

$AM_1=|z_1-1|=|i|=1$ et $AM_2=|z_2-1|=|-i|=1$ donc les deux points $M_1$ et $M_2$ appartiennent au cercle C.

**Partie B**

On considère l'application $f$ du plan complexe qui à tout point $M$ d'affixe $z$ distinct de $A$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par $z'=\dfrac{2z-1}{2z-2}$.

1. Placer le point $A$ et tracer le cercle sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que pour tout complexe $z$ distinct de 1 on a $(z'-1)(z-1)=\dfrac{1}{2}$.

$$(z'-1)(z-1)=\left(\frac{2z-1}{2(z-1)}-1\right)(z-1)=\frac{(2z-1)}{2}-(z-1)=\frac{1}{2}$$

3. Montrer que pour tout point $M$ distinct de $A$ on a : $\begin{cases} AM\times AM'=\dfrac{1}{2} \\ M'\neq A \\ \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}\right)+\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM'}\right)=0+k(2\pi) \end{cases}$, où $k$ est un entier relatif.

a. $AM\times AM'=|z-1|\times|z'-1|=|(z'-1)(z-1)|=\left|\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$.

b. Pour tout complexe $z\neq1$, $2z-1\neq2z-2$ donc $\dfrac{2z-1}{2z-2}\neq1$ et $M'\neq A$.

c. $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}\right)+\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM'}\right)=\arg z_{\overrightarrow{AM}}+\arg z_{\overrightarrow{AM'}}$

$=\arg(z'-1)+\arg(z-1)=\arg\left[(z'-1)(z-1)\right]=\arg\dfrac{1}{2}=0+k(2\pi)$

**4.** On considère le point $P$ d'affixe $z_P = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$. Construire le point $P$.

**5.** En utilisant la question 3, expliquer comment construire le point $P'$, image de $P$ par $f$, et réaliser cette construction.

a. $AP \times AP' = \dfrac{1}{2}$ *or* $AP = \left|1 + e^{i\frac{\pi}{4}} - 1\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = 1$ *donc* $\boxed{AP' = \dfrac{1}{2}}$.

b. $P' \neq A$.

c. $\left(\vec{u} \,;\, \overrightarrow{AP}\right) + \left(\vec{u} \,;\, \overrightarrow{AP'}\right) = 0 + k(2\pi) \iff \boxed{\left(\vec{u} \,;\, \overrightarrow{AP'}\right) = -\left(\vec{u} \,;\, \overrightarrow{AP}\right) + k(2\pi)}$.

Construction : on commence par construire le point Q' symétrique de P par rapport à l'axe des abscisses ce qui nous permet d'obtenir $\left(\vec{u} \,;\, \overrightarrow{AQ'}\right) = -\left(\vec{u} \,;\, \overrightarrow{AP}\right) + k(2\pi)$.

Le point $P'$ est alors le milieu du segment $[AQ']$ (car $AQ' = 1$).

**6.** Soit un point $M$ appartenant à la droite D d'équation $x = \dfrac{3}{4}$. Soit $M'$ son image par $f$.

***a.*** Montrer que le point $M'$ appartient au cercle $C'$ de centre O de rayon 1.

$M$ appartient à la droite D d'équation $x = \dfrac{3}{4}$ donc son affixe $z$ vaut $z = \dfrac{3}{4} + iy$ ainsi

$|z'| = \left|\dfrac{2\left(\frac{3}{4} + iy\right) - 1}{2\left(\frac{3}{4} + iy\right) - 2}\right| = \dfrac{\left|\frac{1}{2} + 2iy\right|}{\left|-\frac{1}{2} + 2iy\right|} = 1$. $|z'| = 1$ donc le point $M'$ appartient au cercle $C'$ de centre O de rayon 1.

***b.*** Tout point de $C'$ a-t-il un antécédent par $f$ ?

Pour tout complexe $z \neq 1$ : $(z'-1)(z-1) = \dfrac{1}{2} \overset{z'\neq 1}{\iff} (z-1) = \dfrac{1}{2(z'-1)} \iff z = \dfrac{1}{2(z'-1)} + 1$.

Seul le point d'affixe 1, c'est-à-dire le point A, n'admet pas d'antécédent par $f$ or celui-ci appartient à $C'$ donc tout point de $C'$ n'admet pas un antécédent par $f$.