Exercice 2 - Polynésie – Sept 2010

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

On a $g(x)=\mathrm{e}^x(1-x)+1$.

Or $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x)=-\infty$, donc par produit des limites : $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=-\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction g.

La fonction g , en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0\,;+\infty[$, est dérivable et sur $[0\,;+\infty[$:

$g'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x=-x\mathrm{e}^x$.

Comme $\mathrm{e}^x>0$ et $x>0$, on a $g'(x)<0$ sur $[0\,;+\infty[$.

g est donc décroissante sur $[0\,;+\infty[$ de $g(0)=2$ à $-\infty$.

3. Donner le tableau de variations de g.

x	0	+
g '(x)	—	
g(x)	2 ↘	-

4. (a) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $[0\,;+\infty[$ une unique solution.

On note α cette solution.

Sur $[0\,;+\infty[$, g est continue et stictement décroissante, $g(0)>0$ et $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=-\infty$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha\in[0\,;+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$.

(b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

La calculatrice donne :

- $g(1)=1$ et $g(2)\approx-6{,}4$, donc $1<\alpha<2$;
- $g(1{,}2)\approx 0{,}3$ et $g(1{,}3)\approx-0{,}1$, donc $1{,}2<\alpha<1{,}3$;
- $g(1{,}27)\approx 0{,}04$ et $g(1{,}28)\approx-0{,}007$, donc $1{,}27<\alpha<1{,}28$.

(c) Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

On a $g(\alpha)=0 \iff \mathrm{e}^\alpha-\alpha\mathrm{e}^\alpha+1=0 \iff \mathrm{e}^\alpha(1-\alpha)=-1 \iff \boxed{\mathrm{e}^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}}$.

5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

On a donc $g(x)>0$ sur $[0\,;\alpha[$;
$g(\alpha)=0$;
$g(x)<0$ sur $[\alpha\,;+\infty[$.

x	0		α		+
g(x)		+	0	−	

Partie B

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ telle que $A(x)=\dfrac{4x}{e^x+1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.

La fonction A quotient de fonctions dérivables sur $[0\,;+\infty[$ (le dénominateur ne s'annulant pas) est dérivable et sur cet intervalle :

$$A'(x)=\frac{4\left(e^x+1\right)-4x\times e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{4\left(e^x-xe^x+1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{4g(x)}{\left(e^x+1\right)^2}.$$

Comme $\left(e^x+1\right)^2>0$ quel que soit x, le signe de $A'(x)$ est celui de $g(x)$.

D'après la précédente question on a donc : $A'(x)>0$ sur $[0\,;\alpha[$; $A'(\alpha)=0$; $A'<0$ sur $[\alpha\,;+\infty[$.

2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\,;+\infty[$.

On a donc :

$A(x)$ est croissante sur $[0\,;\alpha[$ et décroissante sur $[\alpha\,;+\infty[$, $A(\alpha)$ étant le maximum de la fonction.

Partie C

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4}{e^x+1}$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

La figure est donnée en annexe. Pour tout réel x positif ou nul, on note :
M le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées $(x\,;f(x))$, P le point de coordonnées $(x\,;0)$, Q le point de coordonnées $(0\,;f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.

On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.

On sait que $x\geqslant 0$, donc l'aire du rectangle $OPMQ$ est égale à $x\times f(x)=\dfrac{4x}{e^x+1}=A(x)$.

Or on a vu au B.2 que la fonction présente un maximum pour $x=\alpha$.

2. Le point M a pour abscisse α. La tangente (T) en M à la courbe $(\mathcal{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ? *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Le coefficient directeur de la droite (PQ) est égal à $-\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=-\dfrac{\frac{4}{e^{\alpha}+1}}{\alpha}=-\dfrac{4}{\alpha\left(e^{\alpha}+1\right)}$.

Or on a vu que $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$, donc le coefficient directeur est égal à :

$$-\frac{4}{\alpha\left(e^{\alpha}+1\right)}=-\frac{4}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)}=-\frac{4(\alpha-1)}{\alpha(1+\alpha-1)}=-\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^{2}}.$$

La tangente en $M(\alpha\,;\,f(\alpha))$ a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$.

Or $f'(x)=-\dfrac{4e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$, donc $f'(\alpha)=-\dfrac{4e^{\alpha}}{\left(e^{\alpha}+1\right)^{2}}=-\dfrac{\frac{4}{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)^{2}}=-\dfrac{4(\alpha-1)}{(1+\alpha-1)^{2}}=-\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^{2}}$.

Les coefficients directeurs sont égaux : les droites sont parallèles.